

# Incertain, Marché financier,

M1 - Arnold Chassagnon, Université de Tours, PSE - Automne 2015

# Plan du cours

1. Incertain, actifs financiers et marché financier
2. Les conditions d'un marché sans arbitrage
3. Les probabilités risque neutres et les prix des états de la nature
4. Les marchés complets et incomplets
5. Exemples et exercices

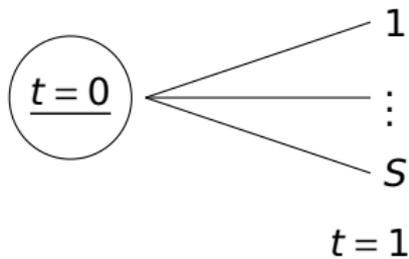
**1.**

Incertain, actifs financiers et marché  
financier

## L'incertain - Une liste d'états de la nature

L'incertain, c'est, que sera demain ?

L'incertitude est représentée à  $t = 1$ . Les choix sont effectués à  $t = 0$ . L'incertitude est représentée *par*  $S$  états de la nature,  $s = 1, \dots, S$ . Toutes les variables demain sont *Contingentes* à l'état de la nature  $s$ .



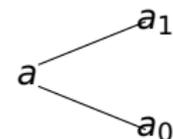
- Remarquez qu'il n'est pas a priori nécessaire de définir des probabilités associés à ces états de la nature
- Remarquez aussi que tout ce que contiennent ces états de la nature n'est pas nécessairement décrit

# Ce qu'est un actif financier

Les actifs financiers, c'est tout et n'importe quoi. Cela traduit les effets d'une action, d'une chose économique, de tout ce qui est contingent aux états de la nature.

**exemple 1**  $\Omega = \{0, 1\}$ ,  $a = (a_0, a_1)$  : il y a deux états de la nature.  $a$  désigne la richesse dans chacun des états de la nature :  $a_0 < a_1$ ,  $a_1 - a_0$  est la perte dans l'état de la nature "accident". C'est par exemple la production suite à un projet risqué

**exemple 2**  $\Omega = \{0, 1\}$ ,  $a = (a_0, a_1)$  :



```
graph LR; a --- a1; a --- a0;
```

**exemple 3**  $\Omega = \mathbb{R}_+$ ,  $a(\omega) = 1$  :  $a$  est l'actif sans risque, qui a toujours la même valeur, quel que soit l'état de la nature.

## Le prix et la disposition à payer un actif financier

Les actifs financiers s'échangent à la date 0, avant que l'état incertain de la date 1 ne se révèle. Ils ont donc un prix, cad la contrepartie contre laquelle ils s'échangent à la date 0. Ce prix est le prix public de marché qu'il convient de distinguer de la disposition à payer pour cet actif financier qui est une mesure subjective du prix maximum que chaque intervenant est disposé à payer cet actif.

Comme tous les biens en économie, prix et disposition à payer sont des indicateurs à la fois de la rareté de l'actif, mais aussi de sa désirabilité.

**exemple** Considérons une situation dans laquelle il y a l'actif  $A_1 = (1, 0)$  qui délivre 1 € dans le premier état de la nature et l'actif  $A_2 = (0, 1)$  qui délivre 1 € dans le second état de la nature. **Ces deux actifs peuvent avoir des prix différents, et pour chaque acteur du marché financier, il peut y avoir aussi des disposition à payer différentes.**

## Le prix et la disposition à payer un actif financier, Comment les interpréter ?

Reprenons les deux actifs  $A_1 = (1, 0)$  et  $A_2 = (0, 1)$  de l'exemple précédent, notons  $q_1$  et  $q_2$  leur prix de marché et  $q_1^{Jo}$  et  $q_2^{Jo}$  la disposition à payer de Jo.

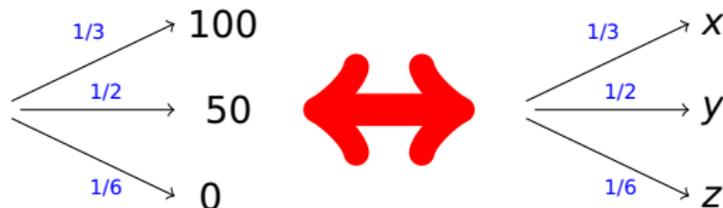
**Principe** Si  $q_1^{Jo} > q_2^{Jo}$ , cela signifie que pour Jo, disposer d'un euro supplémentaire si l'état de la nature 1 se réalise est plus important que de disposer d'un euro supplémentaire si l'état de la nature 2 se réalise.

- ▶ parce que par exemple, l'état de la nature 2 se définit par le fait que Jo va avoir un accident qui va raréfier ses ressources ...
- ▶ ou parce que l'état de la nature 2 se définit par le fait que Jo sera dépendant, et qu'il a moins d'utilité pour la consommation que lorsqu'il est dans l'état de la nature 1
- ▶ .... ou pour toute autre raison dépendant du contexte.

# Pourquoi y a t'il un commerce des actifs financiers ?

Les actifs financiers sont plus ou moins désirables.

On désire pouvoir les échanger, en faire le commerce. Par exemple.



ce qui implique

- qu'il peut y avoir des prix pour ces actifs
- qu'on peut en acheter de plusieurs types : des portefeuilles.

Le but de ce cours est d'étudier les modalités selon lesquelles les agents échangent des actifs financiers et plus avant, les échanges qui se passent à l'équilibre. On désigne plus généralement ce programme comme le partage du risque

# Le marché financier

- $\Omega$  états de la nature à  $t = 1$  :  $\omega \in \{1, \dots, \Omega\}$ .
- $K$  actifs disponibles à la date  $t = 0$  :  $k \in \{1, \dots, K\}$ .  
 $a_k = (\dots a_k(\omega) \dots)$ .  $p_k$  est le prix de cet actif financier.  
  
▶ Un marché financier est formellement la donnée de ces  $K$  actifs financier et de leur prix. On notera  $M = (a, p)$ ,  $a$  désignant la matrice des actifs, et  $p$  la matrice colonne des prix.
- Un portefeuille est une combinaison de plusieurs de ces actifs. On fait l'hypothèse qu'on peut acheter n'importe quelle quantité de ces actifs. (portefeuille=panier dans un autre contexte). Un portefeuille décrit la quantité de chacun des actifs que l'on détient.  $z = (z^1, \dots, z^K)$ .

## Exemple

**Exemple** Dans la matrice suivante, chaque ligne correspond à un actif, et les colonnes désignent les états de la nature.

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle est la valeur du portefeuille qui contient 5 actifs  $k = 1$  et 2 actifs  $k = 2$  dans le cas où l'état de la nature est  $\omega = 2$  ?

## 2.

Les conditions d'un marché sans arbitrage

# Opportunités d'arbitrage

**Définition** Un *portefeuille d'arbitrage* est un portefeuille  $z$  tel que pour tout  $\omega$ ,  $\sum_k z^k a_k(\omega) \geq 0$  pour tout  $\omega$  et  $\sum_k p_k z^k \leq 0$ , avec au moins l'une de ces inégalités strictes.

**Définition** Un marché est sans arbitrage quand il n'existe pas sur ce marché de portefeuille d'arbitrage.

**Proposition** Un marché sans arbitrage satisfait la loi du prix unique : car que si deux actifs  $k$  et  $l$  sont égaux dans tous les états de la nature, ils ont le même prix.

## Exemple

**Exemple** Considérez les trois actifs suivants aux prix  $p$  (chaque ligne correspond à un actif, et les colonnes désignent les états de la nature).

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il y a un portefeuille d'arbitrage. (vérifier avec  $z = (-1, -1, 1)$ , mais en trouver d'autres.

# Prix des états et Théorème de non arbitrage

**Théorème de non arbitrage** La condition nécessaire et suffisante pour qu'un marché soit sans arbitrage est l'existence d'un vecteur de *prix des états de la nature*  $q = (\dots q_\omega \dots)$ , tq

- $q_\omega > 0$  pour tout état  $\omega$
- $p_k = \sum_\omega q_\omega a_k(\omega)$ , pour tout actif  $k$

**Remarque** Le système des prix d'actifs  $q_\omega$  n'est en général pas unique

**Remarque** Cette notion de prix des états n'a pas de rapport immédiat avec des probabilités des différents états de la nature.

## Exemple

**Exemple** Considérez les trois actifs suivants aux prix  $p$  (chaque ligne correspond à un actif, et les colonnes désignent les états de la nature).

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il y a un vecteur de prix des états de la nature

Déduisez-en que ce marché est sans opportunité d'arbitrage.  
Comparer avec l'exemple précédent.

# Résolution de l'exemple

On veut donc montrer qu'il existe  $q_1, q_2, q_3$  tels que

$$\begin{array}{lcl} p_1 & = & 2q_1 + q_3 & p_1 & = & 3 \\ p_2 & = & q_1 + 2q_2 + 4q_3 & \text{avec} & p_2 & = & 7 \\ p_3 & = & 3q_1 + 2q_2 + 5q_3 & & p_3 & = & 10 \end{array}$$

Pour résoudre un système 3 équations - 3 variables, on se ramène d'abord à un système 2 - 2 avec par ex. les deux premières équations

$$\begin{array}{lcl} 2q_1 + q_3 & = & p_1 \\ q_1 + 4q_3 & = & p_2 - 2q_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lcl} 7q_1 & = & 4p_1 - p_2 + 2q_2 \\ 7q_3 & = & -p_1 + 2p_2 - 4q_2 \end{array}$$

En remplaçant dans la troisième équation, cela donne  $7p_3 = 7p_1 + 7p_2 + 0q_2$ . En fait, on est dans un cas particulier où les trois équations ne sont pas indépendantes. C'est-à-dire que la troisième équation est soit redondante quand l'équation  $7p_3 = 10p_1 - p_2$  est vérifiée, soit en contradiction avec les deux premières équations. Dans le cas  $(p_1, p_2, p_3) = (3, 7, 10)$  les trois équations sont compatibles, il existe une infinité de solutions dont par exemple  $q_2 = 1, q_1 = 1, q_3 = 1$ .

# Conséquence : les prix Arrow-Debreu

**Définition** Un actif Arrow-Debreu est un actif qui délivre 1 dans l'état de la nature  $\omega_*$  et 0 dans tous les autres états de la nature. On le note parfois  $1_{\omega=\omega_*}$ .

**Proposition** Si  $q$  est un vecteur de prix des états de la nature, alors, le prix de l'actif Arrow-Debreu qui délivre 1 dans l'état de la nature  $\omega_*$  est exactement  $q_{\omega_*}$ .

► Trouver les prix des états de la nature, ce n'est rien d'autre que de trouver les prix des actifs élémentaires Arrow-Debreu

# 3.

Les probabilités risque neutres et les  
prix des états de la nature

# Probabilité risque neutre

Notons  $k = 0$  l'actif sans risque, qui délivre 1 dans tous les états de la nature, et  $p_0$  son prix.

**Définition** on définit le taux d'intérêt sans risque  $r$  tel que  $1 + r = \frac{1}{p_0}$ .

**Proposition** Définissons le vecteur  $\pi$  proportionnel à  $q$  par  $\pi_\omega = q_\omega(1 + r)$ . Alors  $\pi$  est une distribution de probabilité (cad  $\sum_\omega \pi_\omega = 1$ ).

**Définition** on définit  $\pi$  comme la probabilité risque neutre.

**Remarque** Soit un portefeuille  $z$ . son prix s'exprime à partir des probas risque neutres :

$$p = \frac{1}{1+r} \sum_{\omega,k} \pi_\omega a_k(\omega) z^k$$

# Rendement des actifs

Puisque chaque actif a un prix, il semble assez naturel de vouloir comparer les performances relatives de ces actifs dans les différents états de la nature.

**Définition** on définit le rendement de l'actif  $k$  dans l'état de la nature  $\omega$  par  $r_k(\omega) = \frac{a_k(\omega)}{p_k}$

**Proposition** Pour tout actif financier, la moyenne des rendements, calculée selon la distribution des probabilités risque neutre est toujours identique, égale à  $1 + r$ , c'est à dire au *rendement de l'actif sans risque*

$$\sum_{\omega} \pi_{\omega} r_k(\omega) = 1 + r$$

4.

Marchés complets et incomplets

# Marché complet

**Définition** Un marché est dit complet si pour tout actif  $c = (c(\omega))$ , il existe un portefeuille  $z^k$  tel que  $c = \sum_k a_k(\omega)z^k$ .

**Proposition** Un marché est complet si le rang de la matrice des actifs est égal au nombre d'états de la nature. Lorsque le marché est complet, le système de prix des états de la nature est unique, et l'actif  $c$  a pour prix  $p = \sum_{\omega} q_{\omega}c(\omega)$ .

## Exemple

**Exemple** Considérez les trois actifs suivants aux prix  $p$  (chaque ligne correspond à un actif, et les colonnes désignent les états de la nature).

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que ce marché est sans opportunité d'arbitrage, mais qu'il n'est pas complet.

## Résolution de l'exemple

Cet exemple ressemble à un exemple étudié plus haut, dans lequel on avait vu que les trois équations n'étaient pas indépendantes, et que pour que le système ait une solution, il était nécessaire de vérifier la condition  $p_3 = p_1 + p_2$ , ce qui est le cas ici. Les mêmes calculs permettent de déterminer  $q_1$  et  $q_3$  dès lors que l'on a choisi  $q_2$

$$7q_1 = 4p_1 - p_2 + 2q_2 = 3 + 2q_2$$

$$7q_3 = -p_1 + 2p_2 - 4q_2 = 1 - 4q_2$$

Pour  $q_2 = 1/8$  on trouve  $q_1 = 13/14$  et  $q_3 = 1/14$  : ce marché est donc sans opportunité d'arbitrage. On peut trouver d'autres systèmes de prix en faisant varier  $q_2$ .

Cependant, le fait qu'il y ait plusieurs systèmes de prix Arrow Debreu est le signal que ce marché n'est pas complet.

## Résolution de l'exemple (suite)

Pour démontrer directement que le marché précédent n'est pas complet, on recherche quelle est la stratégie financière  $(z_1, z_2, z_3)$  qui permettrait de conduire à n'importe quel portefeuille vecteur de revenus contingents  $(x, y, z)$ . Ce qui conduit à résoudre le système

$$\left. \begin{array}{rcl} 2z_1 + z_2 + 3z_3 & = & x \\ 2z_2 + 2z_3 & = & y \\ z_1 + 4z_2 + 5z_3 & = & z \end{array} \right\} \Rightarrow 2z - x = 7y$$

Tout comme dans le système d'équation en prix, ces trois équations ne sont pas indépendantes (ou de manière équivalente, le déterminant est nul), ce qui démontré par l'équation de compatibilité  $2z - x = 7y$  entre  $x$ ,  $y$  et  $z$  qui doit être vérifiée pour que le système admette une solution. Quand cette condition n'est pas vérifiée, le système n'a pas de solution, car que les actifs ne peuvent pas conduire à détenir le vecteur  $(x, y, z)$  : le marché n'est pas complet.

# L'ensemble des probabilités risque neutre

**Définition** Soit un marché défini par  $K$  actifs et par un vecteur de prix :  $M = (a, p)$ . On définit l'ensemble des probabilités risque neutre, et on le dénote par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des probabilités  $\pi$  qui sont des probabilités risque neutre pour ce marché.

**Proposition** Soit un marché défini par  $K$  actifs et par un vecteur de prix :  $M = (a, p)$ , alors,

- (i) L'ensemble  $\mathcal{P}$  est toujours convexe
- (ii) Lorsque  $\mathcal{P} = \emptyset$ , il y a des opportunités d'arbitrage
- (iii) Lorsque  $\mathcal{P}$  est réduit à un point, le marché est complet
- (iv) Si  $\pi \neq \pi'$  appartiennent à  $\mathcal{P}$ , alors pour tout  $k$ ,  
$$\sum_{\omega} (\pi_{\omega} - \pi'_{\omega}) a_{\omega} = 0.$$

## Marché pas nécessairement complet

Dans le cas où le marché n'est pas complet, on définit le Span du marché, cad l'espace engendré par les revenus de ces titres :

**Definition** Etant donné un vecteur de payoff contingents  $(c_\omega)_{\omega=1,\dots,S}$ , on dit que ce vecteur est répliquable dans le marché  $M$  s'il existe une stratégie  $z$  qui permette d'obtenir les payoffs  $(c_\omega)$

**Definition** le Span du marché, cad d'un ensemble de titres est l'ensemble des payoffs répliquables dans ce marché dans ce marché.

Quand un vecteur  $c$  n'est pas dans le span, c'est qu'il n'est atteignable par aucune stratégie financière, même si on pouvait y consacrer autant d'argent que l'on voudrait.

# Propriétés du SPAN

**Proposition** Le span du marché est un cône de l'ensemble  $\mathbb{R}^S$ .  
Si les ventes à découvert sont autorisées, le spam est un sous espace vectoriel de l'ensemble  $\mathbb{R}^S$ .

## Bornes de prix en dehors du SPAN

**Définition.** Pour tout vecteur de payoffs contingents  $(c_\omega)$ , répliquable ou non dans le marché  $M$ , on définit la borne inférieure  $v^i$  et la borne supérieure des prix d'arbitrage  $v^s$  comme ;

$$v^i = \frac{1}{1+r} \inf_{\pi \in \mathcal{P}} \{E_\pi[c_\omega]\}$$
$$v^s = \frac{1}{1+r} \sup_{\pi \in \mathcal{P}} \{E_\pi[c_\omega]\}$$

**Théorème** Les prix de tout vecteur de payoffs contingents, lorsqu'ils sont calculés à partir de tous les prix des actifs Arrow-Debreu possible décrivent exactement  $v^i(c) = v^s(c)$ . Un vecteur de payoffs contingents n'est pas répliquable sur le marché  $M$  que si les bornes des prix d'arbitrage sont identiques :

$$v^i(c) = v^s(c) \quad \leftrightarrow \quad c \text{ est répliquable dans le marché } M$$

**Remarque** [Si un vecteur de payoffs contingents n'est pas répliquable sur le marché  $M$  et si on l'ajoute aux actifs qui définissent le marché,

5.

Exemples

## Exemple 1 : Une économie sans arbitrage

Soit un restaurant propose 4 à des prix différents :

Menu 1 :	cassoulet (oie et hari-cots)	à 20 euros
Menu 2 :	steak frites	à 15 euros
Menu 3 :	steak sans garnitures	à 10 euros
Menu 4 :	moules frites	à 13 euros

On suppose que l'on peut commander plusieurs plats et les revendre à d'autres clients ; le restaurant est assez grand pour contenir autant de clients avec tous les goûts possibles que nécessaire.

1. Déterminez quels pourraient être les prix virtuels des 4 ingrédients (oie, haricots, steak, frites, moules) qui justifieraient le prix réel des 4 menus initiaux.
2. Montrez qu'il existe plusieurs systèmes de prix compatibles.
3. Expliquez pourquoi un tel marché n'est pas complet.
4. Le restaurant aurait t'il intérêt à rendre ce marché complet avec une autre tarification ?

## Exemple 1 : hints

- Regarder le système

$$\left\{ \begin{array}{l} p_o + p_h = 20 \\ p_s + p_f = 15 \\ p_s = 10 \\ p_m + p_f = 13 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} p_s = 10 \\ p_f = 5 \\ p_m = 7 \\ p_o + p_h = 20 \end{array} \right.$$

- Quatre équations pour cinq variables : indétermination de dimension 1.
- Marché complet ?

- ▶ Steak : on l'obtient avec le menu 3.  $p_s = 10$ .
- ▶ Frites : on les obtient en achetant le menu 2 et en vendant le menu 3.  $p_f = 15 - 10 = 5$ .
- ▶ Moules : on les obtient en achetant menu 4 et le menu 3 et en vendant le menu 2 :  $p_m = 13 + 10 - 15 = 7$ .

Donc complet si on considère comme 1 le cassoulet, incomplet si l'on distingue oie et haricot.

## Exemple 2 : une économie avec arbitrage

On reprend l'exemple précédent en rajoutant un menu.

Menu 5 : moules et haricots à 30 euros

1. Le menu 5 est manifestement trop cher. Montrez pourquoi il serait aberrant qu'il continue d'être proposé à ce prix.
2. Déterminez quels pourraient être les prix virtuels des 5 ingrédients (oie, haricots, steak, frites, moules) qui justifieraient le prix réel des 5 menus initiaux. Montrez que de tels prix n'existent pas.
3. En déduire que le menu 5 aurait du être proposé à un prix compris entre 8 et 28 euros.
4. Déterminez directement les fonctions de bornes cu et cl du menu 5, en ne considérant que l'on ne peut commander que les 4 premiers menus.
5. Montrez précisément l'analogie entre cet exercice et l'étude des marchés financiers. Quels sont les concepts qui se correspondent ? Quels sont les théorèmes qui se

## Exemple 2 : hints

Si on complétait le système précédent par l'équation  $p_m + p_h = 30$  on arriverait à  $p_h = 23$  et, finalement à  $p_o = -3$ .

- ▶ on voit assez vite dans cet exemple que c'est le menu 5 qui pose problème, car on aurait pu obtenir moule et haricot, dans le système précédent à 27 euros (en jetant l'oie supplémentaire).
- ▶ cependant, formellement, d'où vient le problème ?
- ▶ Construire une multiplicité des prix.

**Principe** Quels que soient le nombre, le prix et la composition des menus proposés, si ceux-ci ne permettent pas d'opportunité d'arbitrage, on peut toujours trouver des valeurs des ingrédients tels que chacun des menus proposés ait un prix égal à la somme des valeurs des ingrédients qui le composent.

**Application** La 5e equation introduit une opportunité d'arbitrage.

## Exemple

**Exemple** Considérez les trois actifs suivants aux prix  $p$  (chaque ligne correspond à un actif, et les colonnes désignent les états de la nature).

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vérifier que ce marché est complet et sans opportunité d'arbitrage. Trouver un prix des actifs Arrow-Debreu

## Résolution de l'exemple

Puisqu'il s'agit de montrer que le marché est complet et sans opportunité d'arbitrage, le plus rapide est de trouver le système unique de prix des actifs Arrow - Debreu. Il s'agit donc de trouver  $q_1, q_2, q_3$  tels que :

$$4 = q_1 + q_2 + q_3$$

$$3 = q_2 + q_3$$

$$3 = q_1 + q_3$$

Le rang de la matrice est 3. On trouve après résolution la solution unique

$$q_1 = 1$$

$$q_2 = 1$$

$$q_3 = 2$$

## Exercice AG 2

On considère une économie avec 4 états de la nature, et quatre actifs

Actif	état $\omega_1$	état $\omega_2$	état $\omega_3$	état $\omega_4$	prix
A	2	1	1	2	13
B	3	1	0	1	7
C	1	1	1	0	8
D	3	0	-1	3	4

- 1) Montrer que  $D = A + B - 2C$  et en déduire que ce marché n'est pas complet.
- 2) Caractériser l'ensemble des probabilités risque neutre.
- 3) Calculer les prix d'arbitrage de l'actif  $(0, 1, 2, 1)$
- 4) Calculer les prix d'arbitrage de l'actif Arrow-Debreu  $(1, 0, 0, 0)$
- 5) Si on rajoute sur le marché l'actif  $E = (1, 1, 1, 1)$  comment sont modifiées les quatre premières questions de l'énoncé ?

## Résolution exercice AG 2

Q1.  $D = A + B - 2C$  est immédiat : cela est vrai tant pour les payoffs dans tous les états de la nature que pour les prix. Ainsi, l'actif  $D$  est exactement répliqué par 1 actif  $A$  et 1 actif  $B$  et la vente à découvert de 3 actifs  $C$ .

Il n'y a donc qu'au plus trois actifs libres, et le marché ne peut pas être complet. [ On peut remarquer que la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est de rang 3, ce qui assure que les trois premiers actifs sont indépendants. ]

Q2. Si l'on recherche les prix des actifs Arrow Debreu,  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , ils vérifient

$$\begin{aligned}2q_1 + q_2 + q_3 + 2q_4 &= 13 \\3q_1 + q_2 + q_4 &= 7 \\q_1 + q_2 + q_3 &= 8 \\3q_1 - q_3 + 3q_4 &= 4\end{aligned}$$

On trouve, en fonction de n'importe quel  $q_1 = q > 0$

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \left( q, \frac{9-5q}{2}, \frac{7+3q}{2}, \frac{5-q}{2} \right) \quad \text{par ex. } (1, 2, 5, 2)$$

## Résolution exercice AG 2 (suite)

Q3. Cet actif peut être répliqué par  $A+C-B$ , aussi son prix de non arbitrage est égal à  $13+8-7=14$  est unique.

Q4. Tous les systèmes de prix trouvés dans la question 2 conviennent, dès lors que tous les prix sont strictement positifs.  $q > 0$  doit donc vérifier les conditions  $9 - 5q > 0$ ,  $3 + 7q > 0$  et  $5 - q > 0$ . On trouve finalement  $q \in (0, 9/5)$ .

Q5. Cet actif additional complète le marché. On vérifiera par exemple que  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2$ ,  $p_3 = 5$  et  $p_4 = 2$  est l'unique système de prix des actifs Arrow-Debreu. A ce prix le prix de  $E$  est échangé, et le prix du premier actif Arrow Debreu est égal à 1.

## En résumé, quelques résultats de référence en finance

- ▶ Tous les prix sont connus à l'équilibre et il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage
- ▶ Si un actif financier se décompose comme la somme de deux autres actifs, son prix à l'équilibre est égal au prix des deux autres actifs
- ▶ Le prix du financement d'un projet est égal au prix de l'actif qui réplique les différents flux de ce projet : d'où le théorème d'équivalence entre les prix des différents types de financement
- ▶ Le prix d'une firme est égal à la somme actualisée de ses dividendes futurs

Le contexte de ces résultats : une hypothèse centrale les prix et la description des actifs (y compris de tous les états de la nature & de leur probabilité d'occurrence) sont connaissance commune de tous les acteurs de l'économie.