Université de TOURS - L1 AES

Cours Outils mathématiques d'aide à la décision

Corrigé du TD n° 1

Bref corrigé du TD n° 1 - groupe 127

Choix de la firme 1 input - 1 output

Automne 2020

Savoirs utiles : Définition de la CPP, du monopole, des variables de choix des entreprises dans ces deux environnements.

| | | |
|---|---|---|
| On dit qu'un marché est en CPP lorsque les conditions sont réunies pour que ses acteurs soient preneurs de prix (par exemple sous l'hypothèse d'Atomicité de l'offre et de la demande). Sur un tel marché, les entreprises n'ont qu'une variable de décision : le niveau de la production. L'hypothèse selon laquelle tout ce qui est produit est vendu rend aisé l'écriture de la fonction de profit. | La profit d'une firme est toujours la différence entre ses recettes et ses coûts. En CPP, lorsque la firme décide de produire la quantité $q$, en dépensant le coût $C(q)$, on fait l'hypothèse qu'elle vend tout. Son profit est alors : $$\pi(q) = q * p - C(q),$$ où $p$ désigne le prix de marché. | Sur un tableur, on peut simuler différentes décisions de la firme pour trouver la décision optimale. Cela n'est possible qu'à partir de problèmes formulés sans contrainte. |

Dans tout le TD nous analysons le comportement de plusieurs firmes. DEUX REPRESENTATIONS DE LA FIRME SONT UTILISEES TOUR A TOUR. *La première*, où l'on connaît la firme à partir de sa fonction de coût : on sait évaluer le coût pour produire un bien en quantité $y$ : $C(y)$. Le profit s'écrit alors$\pi = py - C(y)$. *La seconde*, où l'on connaît la firme à partir de sa technologie qui décrit comment une quantité $y$ de bien est produite à partir d'une quantité $x$ d'input. Si on note $p$, le prix de l'output, $w$ le prix de l'input $w$, le profit du plan de production $(x, y)$ est donc $\pi(x, y) = py - wx$. Notez que dans cette seconde formulation, on devra déterminer à la fois $x$ et $y$.

# 1 Firmes dont on connaît la fonction de coût

Considérons les trois firmes suivantes, chacune caractérisée par une fonction de coût $C(y)$ :

$$\begin{array}{lclcl} A & : & C(y) = wy^2 & B & : \quad C(y) = wy^3 \\ C & : & C(y) = w\dfrac{y}{2-y} & & \text{avec l'hypothèse } y \leq 2 \end{array}$$

1) Pour chacune de ces firmes écrire le programme de la firme en CPP

$$\begin{array}{lclcl} A & : & \max_y py - wy^2 & B & : \quad \max_y py - wy^3 \\ C & : & \max_y py - w\dfrac{y}{2-y} & & \textbf{avec l'hypothèse } y \leq 2 \end{array}$$

2) Pour chacune de ces firmes décrire le comportement de la firme en CPP

**Pour chacune des firmes on écrit la FOC, on vérifie les conditions secondes, et on conclue, ou on développe un complément d'analyse suivant le cas. Enfin, on n'oublie pas la dernière vérification à savoir si le profit obtenu est positif ou non**

**<u>Firme A</u>** $\pi(y) = py - wy^2$ **;** $\pi'(y) = p - 2wy$ **;** $\pi''(y) = -2w < 0$ **; la fonction de profit est concave, la FOC, si elle donne une condition conduit au maximum du profit. FOC :** $p = 2wy$ **soit** $y = \frac{1}{2}\frac{p}{w}$ **; le profit est alors** $\pi = \frac{1}{2}\frac{p^2}{w} - \frac{1}{4}\frac{p^2}{w} = \frac{1}{4}\frac{p^2}{w} > 0$.

**<u>Firme B</u>** $\pi(y) = py - wy^3$ **;** $\pi'(y) = p - 3wy^2$ **;** $\pi''(y) = -6wy \leq 0$ **; la fonction de profit est concave, la FOC, si elle donne une condition conduit au maximum du profit. FOC :** $p = 3wy^2$ **soit** $y = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{p}{w}}$ **; le profit est alors** $\pi = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{p^3}{w}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\frac{p^3}{w}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\frac{p^3}{w}} > 0$.

**Firme C** $\pi(y)=py-w\frac{y}{2-y}$ **;** $\pi'(y)=p-w\frac{1}{2-y}-w\frac{y}{(2-y)^2}$ **;** $\pi''(y)=-w\frac{1}{(2-y)^2}-w\frac{1}{(2-y)^2}-2w\frac{1}{(2-y)^3}<0$ **; la fonction de profit est concave, la FOC, si elle donne une condition conduit au maximum du profit. FOC :** $p=w/(2-y)$ **soit** $y=2-\frac{p}{w}$ **; le profit est alors** $\pi=py-\frac{p}{w}wy=0$**.**

3) Ouvrir un tableur, avec un onglet pour la firme A et un onglet pour la firme B. Sur la première ligne, mettre les paramètres. On choisira $p=0,10$ et $w=1$, puis $p=10$ et $w=1$ et enfin pour $p=500$ et $w=1$. Dans la colonne de gauche, faire varier $q$ de 1 à 100 (incrémenter de 1 ; vous pouvez changer les lettres et prendre $y$ à la place de $q$ si vous êtes plus à l'aise), dans la seconde colonne, écrire le profit correspondant et conclure si possible à propos du choix de la firme.

**On trouve que lorsque** $p=0,1$**, la firme a toujours un profit négatif : ne pas produire. Lorsque** $p=10$**, le profit optimal est obtenu pour** $q=5$**, et on trouve enfin que pour** $p=500$**, le profit est toujours croissant en** $q=100$**, ce qui indique que le choix optimal de la firme est supérieur à 100.**

*On suppose que la demande sur le marché sur laquelle se trouve la firme est $D(p)=100/p$. On rappelle que la valeur absolue de l'élasticité de la demande est, dans ce cas là, constante, égale à $\varepsilon=1$.*

4) Pour chacune de ces firmes, écrire le programme de la firme en monopole

$$A:\quad \max_{y,p} py-wy^2 \quad \textbf{s.c. } y\le 100/p \qquad B:\quad \max_{y,p} py-wy^3 \quad \textbf{s.c. } y\le 100/p$$

$$C:\quad \max_{y,p} py-w\frac{y}{2-y} \quad \textbf{s.c. } y\le \min(2,100/p)$$

5) Réexpliquer pourquoi à l'optimum du monopole, on devrait avoir $q=D(p)$, en deux trois lignes

**Dans le programme, on choisit** $p$ **et** $y$**, à la condition que** $y$ **n'est pas supérieur à la demande. On fait l'hypothèse que la firme a intérêt de produire le plus possible en respectant cette condition. D'ailleurs, si cette contrainte n'était pas saturée, on aurait le profit maximal**

6) En déduire l'écriture de la fonction de profit $\pi(p)$ comme une fonction du prix, calculer $\pi'(p)$ et écrire $\pi'(p)=0$

$\Pi(p)=p*100/p-C(100/p)$.

**AUTRE METHODE : Etant donné que les firmes sont caractérisées par un coût fonction de la quantité, on écrit le profit comme une fonction de la quantité, en remplacementçant** $p$ **par la disposition à payer la** $qieme$ **unité produite,** $p=100/y$ **ce qui conduit à une recette constante égale à 100. On a alors** $\pi(y)=100-C(y)$**. Il s'agit alors pour maximiser le profit de minimiser le coût, ce qui conduit à** $y=0$ **dans les trois cas, le coût marginal étant positif (dans le cas** $C$**,** $c(y)=-1+2/(2-y)$**,**$c'(y)=2/(2-y)^2>0$**.) - On obtient le même résultat que par la méthode classique développée dans la question suivante. Voir le commentaire.**

7) Écrire concrètement la condition optimale du monopole dont la version générale est $(p-C_m)/p=1/\varepsilon$

**Il y a une coquille dans l'énoncé : la condition optimale du monopole est :** $\frac{p-C_m}{p}=1/\varepsilon$

**Pour la demande considérée dans l'exercice, la condition optimale du monopole s'écrit** $\frac{p-C_m}{p}=1$**, soit** $p-c_m=p$**,** $C_m=0$ **: Le coût marginal du monopole doit être zéro : on est dans un cas très particulier où le monopole ne devrait pas produire plus qu'une quantité epsilonesque : il n'y a pas d'équilibre, étant donné la discontinuité en zéro. Notons cependant que comme dans les prédictions théoriques standard, le prix du monopole sera plus élevé que le coût marginal, si l'on produit très peu et que la**

**disposition marginale à payer est $p = 100/q$ tend vers l'infini. On doit juste noter que la fonction de demande proposée n'est pas du tout réaliste.**

8) Comparer ce que vous obtenez en 5) et 6)

9) Pour chacune de ces firmes, donner le comportement optimal optimal de la firme, qu'on notera $(p^*, q^*)$

10) Accompagner la question 8) par un bref croquis reprenant la forme de la fonction de profit dans un espace $(p, \pi(p))$

## 2 Plans de production optimaux en CPP de firmes dont on connaît la technologie de production à partir de un seul input

Considérons les 4 firmes suivantes, chacune caractérisée par une fonction de production :

$$\begin{array}{ccccccc} A & : & y = \sqrt{x} & \quad & B & : & y = x^{\frac{1}{3}} \\ C & : & y = 2 - \dfrac{2}{1+x} & \quad & D & : & y = x^2 \end{array}$$

On appelle ensemble des plans de production, l'ensemble des plans de production $(x, y)$ réalisables par la firme c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y)\ y \leq f(x)\}$. On rappelle que le profit du plan de production $(x, y)$ est $\pi(x, y) = py - wx$

1) Pour chacune des firmes vérifier si l'ensemble des plans de production est convexe ou non

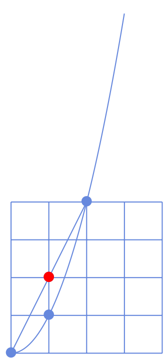
**Le plan de production est en dessous de la courbe $y = f(x)$. Une condition suffisantes (mais pas nécessaire) pour la convexité est que cette courbe $y = f(x)$ soit concave. En effet, l'ensemble la courbe $y = f(x)$ est alors convexe. Une condition pour que la fonction $f$ soit concave est que sa dérivée seconde soit négative**

**Firme A** $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f''(x) = -1/4\sqrt{x} < 0$, **donc $f$ concave et l'ensemble de production convexe.**

**Firme B** $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, **donc $f$ concave et l'ensemble de production convexe.**

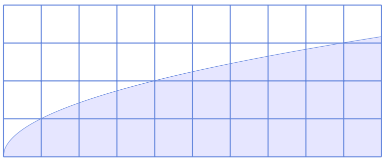
**Firme C** $f(x) = 2 - \dfrac{2}{1+x}$, $f'(x) = +\dfrac{2}{(1+x)^2}$, $f''(x) = -\dfrac{4}{(1+x)^3}$, **donc $f$ concave et l'ensemble de production convexe.**

**Firme D** $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$, **$f$ est convexe, donc il y a à parier que l'ensemble de production n'est pas convexe. Prenons par exemple deux plans de production $(0, 0)$ et $(2, 4)$, le milieu de ces deux points est $I = (1, 2)$ il n'est pas dans l'ensemble de production, car quand on utilise $x = 1$, on obtient au plus, par cette technologie $y = 1 < 2$.**

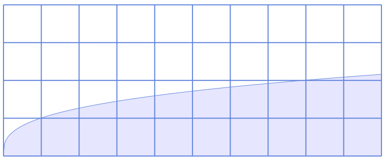


2) Pour chacune des firmes, tracer l'ensemble de production quand $x \leq 10$.

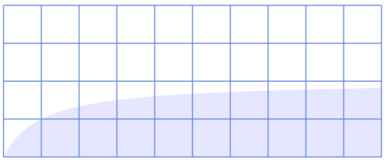
**Firme A** $f(x) = \sqrt{x}$,



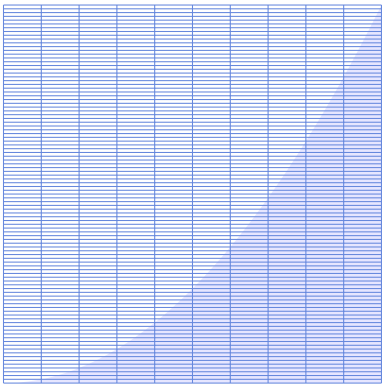
**Firme B** $f(x) = x^{1/3}$,



**Firme C** $f(x) = 2 - \dfrac{2}{1+x}$,



**Firme D** $f(x) = x^2$,



3) Pour chacune des firmes, après avoir tracé plusieurs droites d'iso-profit, trouver le plan optimal de production quand $p = 1$ et $w = 1$

**L'énoncé ne le précise pas, on suppose implicitement que la firme est en CPP. Le profit est $\Pi = pf(x) - wx = f(x) - x$ ; $\Pi_x = f'(x) - 1$ ; $\Pi_{xx} = f''(x)$ ; quand la dérivée seconde est négative, comme dans les cas $A$, $B$ et $C$, le plan optimal de production est tel que la condition première $\Pi_x = 0$ est satisfaite, soit, ici quand $f'(x) = 1$ (cad, vieux souvenir de micro, quand la productivité marginale égale le prix relatif du facteur).**

**Firme A** **$f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f''(x) = -1/4\sqrt{x} < 0$, FOC : $2\sqrt{x} = 1$ soit $x = 1/4$, ce qui définit le maximum de production car $f$ concave.**

**Firme B** **$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, FOC : $x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$ donc $x^2 = \frac{1}{27}$ et $x = 0,19245$, ce qui définit le maximum de production car $f$ concave.**

**Firme C** **$f(x) = 2 - \dfrac{2}{1+x}$, $f'(x) = +\dfrac{2}{(1+x)^2}$, $f''(x) = -\dfrac{4}{(1+x)^3}$, FOC : $(1+X)^2 = 2$, soit $1 + x = \sqrt{2}$, $x = 0,414213$, ce qui définit le maximum de production car $f$ concave.**

**Firme D** **$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$, on ne peut pas utiliser la FOC qui détermine un minimum local, Plus la firme produit, plus elle va faire de profit. Il n'y a donc pas de profit optimum.**

4) Pour chacune des firmes, reprendre la même question quand $p = 2$ et $w = 1$

**Le raisonnement identique conduit à la FOC $f'(x) = \dfrac{w}{p} = 0,5$. On reprend les FOC pour chacune des firmes A, B, C dont ont sait qu'elle caractérise le choix optimal. On présente les résultats dans un tableau**

| | **caractéritiques** | $p = 1$ ; $W = 1$ ; $f'(x) = 1$ | $p = 2$ ; $W = 1$ ; $f'(x) = \frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| **Firme A** | $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f'' < 0$ | $2\sqrt{x} = 1$, **soit** $x = 1/4$ | $\sqrt{x} = 1$, **soit** $x = 1$ |
| **Firme B** | $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f'' < 0$ | $x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$, **soit** $x = \sqrt{\dfrac{1}{27}} = 0,19245$ | $x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$, **soit** $x = \sqrt{\dfrac{8}{27}} = 0,54433$ |
| **Firme C** | $f'(x) = +\dfrac{2}{(1+x)^2}$, $f'' < 0$ | $(1+X)^2 = 2$, **soit** $1 + x = \sqrt{2}$, $x = 0,414213$ | $(1+X)^2 = 4$, **soit** $1 + x = 2$, $x = 1$ |

**Pour la firme $D$, il n'y a pas de comportement optimal. Elle produirait à l'infini, et ce, quel que soit les niveaux de prix positifs envisagés.**

5) Vérifier que lorsque l'on passe de $p = 1$ et $w = 1$ à $p = 2$ et $w = 1$, le plan de production optimal conduit à produire plus. Trouver un argument mathématique qui permette de l'expliquer.

**On vérifie que le plan de production est plus élevé, en vérifiant par exemple qu'il y a plus d'inputs utilisés quand l'on passe de $p = 1$ et $w = 1$ à $p = 2$ et $w = 1$.**

**firme $A$ Elle utilisait 1/4. Désormais, 1.** **OK**

**firme $B$ Elle utilisait $\sqrt{\dfrac{1}{27}}$. Désormais, $\sqrt{\dfrac{8}{27}}$.** **OK**

**firme $C$ Elle utilisait $\sqrt{2} - 1$. Désormais, 1.** **OK**

**Mathématiquement dans le premier cas, la solution est caractérisée par $f'(x) = 1$ alors que dans le second cas par $f'(x) = 1/2$. Comme pour les firmes $A$, $B$ et $C$ $f'$ est décroissante, la solution de la deuxième équation est nécessairement plus grande.**

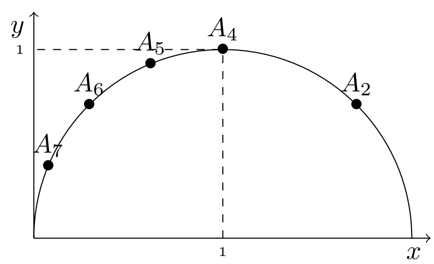
**Ce raisonnement mathématique est conforme à l'intuition économique. Quand le prix de vente augmente, toutes choses égales par ailleurs, l'offre de la firme est plus élevée.**

6) Même question quand $p = 2$ et $w = 2$. Comparer avec les résultats de la question 3).

**Notons que quand à la fois le prix de vente et le prix de l'input augmentent dans les mêmes proportions, si le profit va augmenter dans la même proportion, le choix optimal de la firme ne bouge pas. En effet. Dans les cas des firmes $A$, $B$ et $C$, l'équation qui caractérise le choix optimal dans la question 3 était $f'(x) = 1/1 = 1$, celle qui caractérise le choix optimal dans la question 6 est $f'(x) = 2/2 = 1$, soit la même équation (donc les mêmes solutions).**

## 3 Conditions pour un plan de production optimum

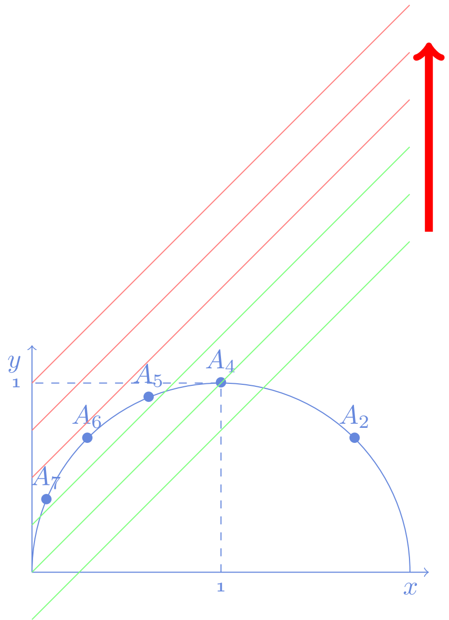
Soit une firme produisant un output en quantité $y$ à partir d'input en quantité $x$ dont l'ensemble des points de production est représenté ci-contre, La frontière étant un demi-cercle centré en $(1, 0)$ de 1 cm de diamètre. On considère plusieurs plans de production sur cette frontière : $A_4 = (1, 1)$
$A_6 = (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\quad A_5 = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$ $A_2 = (1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\quad A_7 = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}), \frac{1}{2})$




1) Dire lequel des plans de production est optimum lorsque $p = w = 1$

2) dire pour chacun de ces points, les conditions sur les prix $p$ et $w$ pour que le point considéré corresponde au choix optimal de la firme.

**1) Dans l'espace $x, y$ une droite d'isoprofit est d'équation $py - wx = \pi$, c'est une droite croissante de pente $\frac{w}{p}$**




**Dans un cas comme cela, lorsque l'on veut maximiser le profit, il faut trouver la droite d'isoprofit la plus haute, qui soit compatible avec la contrainte technologique (celles représentées en vert, celles qui sont représentées en rouge sont au-delà de la frontière technologique) $\Rightarrow$ DONC, on cherche en fait la droite d'isoprofit, de pente 1, qui est tangente au demi-cercle centré en (1,0) de 1cm de diamètre.**

**On se doute que c'est le point $A_6$**

**Pour le vérifier, on peut calculer la pente du cercle au point $A_6$. Le cercle a pour équation $(x-1)^2+y^2 = 1$, la pente au point de coordonnée $(x, y)$ est $TMS = -\dfrac{2(x-1)}{2y}$. Au point $A_6$ la pente est $TMS = \dfrac{2(x-1)}{2y} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$, CQFD**

**2) Les seuls points qui peuvent être optimaux sont $A_7$, $A_6$, $A_5$ et $A_4$, les autres points étant tous dominés par $A_4$.**

**Pour que le point $A_i$ soit le choix optimal de la firme Il faut que le TMS en $A_i$ égale $w/p$.**

**Pour $A_7$, $TMS = \dfrac{\sqrt{3}/3}{1/2} = 2\sqrt{3}/3$. La condition est $w/p = 2\sqrt{3}/3$.**

**Pour $A_6$, on a vu que $w/p = 1$ était la condition.**

**Pour $A_5$, $TMS = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}/3$. La condition est $w/p = \sqrt{3}/3$.**

**Pour $A_4$, TMS=0. La condition est $w = 0$. Cette condition n'est jamais vérifiée dans un contexte économique .**

Fin du corrigé du TD 1