Exercice 1

On a $p(Q^d) = 4 - Q^d$ avec $Q^d = q_1^d + q_2^d$. Les coûts sont $C_1(q_1^d) = q_1^d$ et $C_2(q_2^d) = \frac{(q_2^d)^2}{2}$.

L'équilibre de Cournot

1) Pour déterminer l'équilibre de Cournot-Nash, on cherche les fonctions de réaction : chaque entreprise maximise son profit en prenant la production de l'autre entreprise comme fixe.

   Pour l'entreprise 1 :

$$\max_{q_1^d} p(Q^d) \times q_1^d - C_1(q_1^d) = (4 - q_1^d - q_2^d) \times q_1^d - q_1^d$$

   Les conditions de premier ordre donnent :

$$\begin{aligned} 4 - q_1^d - q_2^d - q_1^d - 1 &= 0 \\ 2q_1^d &= 3 - q_2^d \\ q_1^d &= \frac{3 - q_2^d}{2} \end{aligned}$$

   La dernière ligne représente la fonction de réaction de l'entreprise 1 elle nous donne pour chaque quantité q_2^d produite par la firme 2, la quantité que doit produire la firme 1 pour maximiser son profit.

   Si on fait la même chose pour l'entreprise 2 (à faire !), on trouve la fonction de réaction : $q_2^d = \frac{4-q_1^d}{3}$.

   L'équilibre de Cournot-Nash [1] est défini comme étant les quantités qui sont meilleures réponses l'une de l'autre, c'est à dire qui résolvent le système suivant :

$$\begin{cases} q_1^d = \frac{3-q_2^d}{2} \\ q_2^d = \frac{4-q_1^d}{3} \end{cases}$$

   Si on résout (à faire !), on obtient $q_1^d = q_2^d = 1$.

2) Le prix est donné en remplaçant les quantités produites dans la fonction de demande inverse : $p = 4 - (q_1^d + q_2^d) = 4 - 2 = 2$

3) On utilise le prix et les quantités produites pour trouver le profit de chaque entreprise (à faire) et on obtient $\pi_1 = 1$ et $\pi_2 = \frac{3}{2}$.

L'équilibre de Stackelberg

1) Si l'entreprise 2 est dominante, elle intègre la fonction de réaction de l'entreprise 1 dans sa maximisation du profit. [2] Elle résout donc (on a remplacé q_1^d par la fonction de réaction trouvée précédemment) :

$$\max_{q_2^d} \left(4 - \frac{3 - q_2^d}{2} - q_2^d\right) \times q_2^d - \frac{(q_2^d)^2}{2}$$

1. Initialement cette résolution a été proposée par Cournot avant que Nash définisse formellement son concept d'équilibre. Cournot travaillais sur un modèle d'oligopole comme celui-ci, il résolvais donc déjà ce que plus tard on appellera des équilibres de Nash ! Nash a lui montré que ce concept d'équilibre pouvait être appliqué (et existait toujours surtout) dans tout type de situation stratégique, ce qu'on appelle aujourd'hui un jeu.

2. On résout en fait l'équilibre de Nash en sous jeux parfait du jeu extensif de Stackelberg : on commence donc par la fin du jeu, l'entreprise 1 qui est dominée observe le prix que la dominante a fixé q_2 et maximise donc son profit par rapport à cette valeur q_2. L'entreprise 2, en anticipant ce comportement sait donc la réaction de l'entreprise 1 pour chacune de ses décisions de q_2 elle peut donc utiliser cette anticipation au moment où elle choisit sa quantité.

Après résolution (à faire), on trouve $q_2^d = \frac{5}{4} = 1.25$. On met cette valeur dans la fonction de réaction de l'entreprise 1 pour trouve $q_1^d = \frac{7}{8} = 0.875$.

2) On remarque que : 1) la firme dominante produit d'avantage que sous Cournot et la firme dominée moins 2) la quantité totale produite est plus élevée que sous Cournot, le prix est donc moins élevé sous Stackelberg que sous Cournot (c'est donc meilleur pour le consommateur).

3) On injecte les quantités dans la fonction de demande inverse pour trouver le prix, puis les profits (à faire) qui sont : $\pi_2 = \frac{59}{50} = 1.5625$ (plus grand que sous Cournot avant !) et $\pi_1 = \frac{49}{64} = 0.765625$ (plus petit que sous Cournot avant !).

Le cartel

1) Quand les entreprises forment un carte, elle produisent les quantités qui maximisent les profits joints :

$$\max_{q_1^d, q_2^d} \pi_1 + \pi_2 = (4 - q_1^d - q_2^d)(q_1^d + q_2^d) - q_1^d - \frac{(q_2^d)^2}{2}$$

On maximise par rapport à deux variables cette fois, les conditions de premier ordre nous donnent un system de 2 équations à deux inconnues dont la solution est (à faire) $q_1^d = \frac{1}{2}$ et $q_2^d = 1$.

2) On remplace donc pour obtenir le prix $p = \frac{5}{2} = 2.5$.

3) On constate que le prix est plus élevé que les deux situations d'avant

4) Le profit de chaque firme est $\pi_1 = 0.75$ et $\pi_2 = 2$.

5) Si les entreprises se mettent d'accord pour repartir équitablement le profit total, chacune d'elle doit obtenir 1.375 de profit. Donc l'entreprise 2 doit verser $2 - 1.375 = 0.625$ à l'entreprise 1.

La concurrence en prix

On considère une compétition en prix avec des biens substituts mais pas des substituts parfaits (sinon on retombe sous la concurrence à la Bertrand). Donc la demande pour un bien est affectée par son prix mais également le prix de l'autre bien. La résolution est identique à une compétition à la Cournot sauf que les entreprises décident de leurs prix.

1) Etant donné que les entreprises choisissent leurs prix, il faut d'abord chercher les fonctions de demande (et non demandes inverses comme données dans l'énoncé). Il faut donc exprimer les quantités demandées en fonction des prix. Comme les quantités demandées vont dépendre des prix des deux biens, il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} p_1 &= 3 - \frac{3}{4}q_1^d - \frac{1}{4}q_2^d \\ p_2 &= 1 - \frac{1}{4}q_1^d - \frac{3}{4}q_2^d \end{cases}$$

La résolution (à faire), donne :

$$\begin{cases} q_1^d &= 4 - \frac{3}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \\ q_2^d &= \frac{1}{2}p_1 - \frac{3}{2}p_2 \end{cases}$$

Remarquez qu'on a bien l'intuition que les biens sont des substituts : si le prix du bien 2 augmente alors la demande de bien 1 augmente et vice-versa. Pour trouver les fonctions de réaction, comme pour Cournot, on maximise le profit de chaque entreprise (la variable de décision est le prix maintenant !) en prenant le prix de l'autre entreprise comme fixe. Pour l'entreprise 1, cela donne : [3]

$$\max_{p_1} p_1 \times (4 - \frac{3}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2) - (4 - \frac{3}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2) = (p_1 - 1)(4 - \frac{3}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2)$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$\begin{aligned} 4 - \frac{3}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 - \frac{3}{2} &= 0 \\ p_1 = \frac{11 + p_2}{6} \end{aligned}$$

Si on fait de même pour l'entreprise 2 (à faire), on trouve une fonction de réaction : $p_2 = \frac{5}{21}p_1$.

2) On résout l'équilibre de Nash de ce jeux, ce sont les prix qui sont meilleures réponses mutuelles :

$$\begin{cases} p_1 &= \frac{11+p_2}{6} \\ p_2 &= \frac{5}{21}p_1 \end{cases}$$

La résolution (à faire), donne : $p_1 = \frac{21}{11} = 1.090909$ et $p_2 = \frac{5}{11} = 0.454545$.

3) On injecte les prix dans les fonctions de demande et on calcule les profits (à faire) : $\pi_1 = \frac{84}{121} = 0.694215$ et $\pi_2 = \frac{21}{242} = 0.0867769$.

3. Attention, ici la fonction de demande est spécifique à chaque entreprise. Les biens sont imparfaitement substituables (pensez par exemple à un téléphone avec flash vs un téléphone sans flash, les demandent sont différentes mais si vous augmentez trop le prix du téléphone avec flash, une partie de la demande préfèrera le téléphone sans flash et vice-versa). Sous Cournot la fonction de demande inverse utilisée est la même pour les deux entreprises car les entreprises produisent des biens parfaitement substituables = les mêmes biens donc il n'y a qu'une seule demande pour ce type de bien et non deux comme dans cet exercice.