Finance de Marché

TD1 : Mathématiques financières et Equation de Fisher

Responsable du cours : Jean-Etienne Carlotti
Chargée de TD : Nathalie Ferrière

Année universitaire 2016/2017

Université Paris Sud 11

Table des matières

Rappel de notions

1. Quel est le rôle des marchés financiers ?

   Comme tout marché, le marché financier sert d'interface entre une offre et une demande : demande de capital et offre de capital.

   Les marchés primaires financiers servent principalement à collecter et investir des capitaux (demande de capital (investissement) qui rencontre une offre de capital (épargne)). Il permet de concilier les besoins des prêteurs et des emprunteurs en terme de risque, rendement et liquidité. Son rôle est d'autant plus important qu'il y a un décalage entre le moment où le capital est donné et celui où il est remboursé (notion de risque et de liquidité sous-jacente).

   Le marché financier a aussi un rôle dans la diffusion de l'information en établissant les valeurs et les cotations des prêteurs et emprunteurs. Il permet de caractériser le risque associé à chaque acteur du marché.

   Le marché secondaire a pour rôle d'assurer la liquidité des titres (si besoin de revente des détenteurs des titres avant échéance) qui freineraient sinon les échanges. Le marché secondaire permet aussi les restructurations du capital des entreprises, et de fixer les cours des titres.

2. Discuter des trois notions d'efficience des marchés.

   En premier lieu rappelons les hypothèses nécessaires à l'efficience de marché : rationalité des investisseurs (les investisseurs cherchent à maximiser leur profit à moindre risque), gratuité et libre circulation de l'information disponible (pas d'asymétrie d'information), réaction instantanée des investisseurs à toute nouvelle information (pas de délais d'ajustement), absence des coûts de transactions et d'impôts de bourse (pas de barrière à l'entrée des agents), atomicité des investisseurs (pas de position dominante de marché) et la liquidité (les transactions sont faisables).

   Les différentes formes d'efficicence dépendent de la façon dont on définit l'information disponible :

   — **Efficience faible** : l'information disponible est constituée de l'historique du cours de l'action et de son prix actuel. Un marché est efficient au sens faible si toute information basée sur les cours passés est pleinement reflétée dans le prix des titres..
   — **Efficience semi-forte** : information sur l'historique des cours + toute information publique (concernant l'entreprise, l'activité économique générale)
   — **Efficience forte** : information sur l'historique des cours + toute information publique + toute information privée.

3. Qu'est-ce que l'actualisation ? Pourquoi doit-on actualiser ?

   L'actualisation est l'application de taux, dit taux d'actualisation, à des flux financiers non directement comparables et portant sur des durées différentes, afin de les comparer ou combiner de diverses façons.

   On actualise pour deux raisons : prendre en compte la valeur temps de l'argent (préférence pour le présent et impact de l'inflation) et rémunérer le risque.

4. Quels sont les facteurs déterminant le niveau général des taux d'intérêt ? Ceux déterminant la structure des taux d'intérêt ?

   Niveau général des taux d'intérêt : l'activité économique et l'inflation. Plus les perspectives de développement économique sont élevées, plus l'investissement est élevé et plus la demande d'emprunt est élevée. A offre constante cela accroît le niveau des taux d'intérêt. L'inflation anticipée car l'inflation érode les revenus réel des créanciers car les contrats sont libellés en termes nominaux. On retrouve l'équation de Fisher : $i_n = i_r + \pi$. Rôle crucial de la Banque Centrale dans la détermination des taux directeurs (taux qui dépendent de la cible d'inflation fixée par la Banque Centrale et de son soutien à l'activité économique (axe secondaire pour la BCE mais aussi important que l'inflation pour la FED).

La structure des taux d'intérêt : il coexiste plusieurs taux d'intérêt dans une économie qui dépendent du risque présenté par l'emprunteur et de l'échéance des emprunts. Structure par risque des taux d'intérêt : plus la probabilité de rempboursement est faible plus le taux d'intérêt va être élevé. La structure par terme des taux d'intérêt : les taux croissent avec l'échéance des titres. A cause de la théorie des anticipations (nécessité d'absence d'arbitrage) : il doit être équivalent d'investir 100 dans un titre à un an au taux à un an puis de le réinvestir dans un an dans un titre à un an que d'investir dès aujourd'hui dans un titre à deux ans. En conséquence le taux à deux ans (en négligeant les petites valeurs) est la moyenne du taux à un an et du taux anticipé à un an dans un an ie :

$$i_t + i_{t+1}^a = 2i_{2t}$$

Ce premier point ne garantit pas que i_{2t} soit plus élevé que i_t. Il faut rajouter une prime de liquidité : les titres à long terme comportent un risque plus élevé de variation de cours que les titres à court terme en cas de hausse des taux + immobilisation de la liquidité sur une plus longue période. Prime de liquidité : les agents préfèrent avoir de la liquidité à ne pas en avoir (cf théorie de la monnaie de Keynes par exemple). Il est donc nécessaire de rémunérer la perte de liquidité via le taux d'intérêt et d'autant plus que l'échéance (la période pendant laquelle la liquidité est bloquée) est longue. D'où :

$$\frac{i_t + i_{t+1}^a}{2} + p_{it} = i_{2t}$$

Exercice 1 : Taux d'intérêt simple et taux proportionnel

1. Matthieu place sur son livret 2 500 €. Le taux d'intérêt simple est de 0,75 % semestriel. De combien disposera-t-il dans six mois ? un an ? trois ans ? sachant qu'il n'effectue aucun retrait ni placement supplémentaire.

   Formule utilisée : $V_n = V_0 * (1 + n * i)$ avec V_n la valeur finale, V_0 la valeur initiale, i le taux d'intérêt simple et n la durée sur laquelle court l'investissement/le placement. $n < 1$ si la période est plus courte que la base du taux d'intérêt. Par exemple $n = \frac{1}{12}$ si on veut calculer les intérêts acquis en un mois par un taux d'intérêt annuel.

   Application numérique : il y a 2 semestres dans une année et 6 semestres dans trois années.

Echéance	Gain	Somme disponible
6 mois	2500 * 0.0075 * 1 = 18,75	2518,75
1 an	2500 * 0.0075 * 2 = 37,5	2537,5
3 ans	2500 * 0.0075 * 6 = 112,5	2612,5

2. Suite à une modification du système bancaire, le taux exprimé est un taux d'intérêt annuel simple de 1,2 %. Est-ce plus avantageux que précédemment ? De combien disposera-t-il dans six mois ? un an ? trois ans ? sachant qu'il n'effectue aucun retrait ni placement supplémentaire.

   Même formule, la base du taux d'intérêt change (annuel au lieu de semestriel). Il y a une demi-année dans un an.

Echéance	Gain	Somme disponible
6 mois	2500 * 0.012 * 0.5= 15	2515
1 an	2500 * 0.012 * 1 = 30	2530
3 ans	2500 * 0.012 * 3 = 90	2590

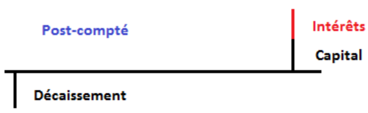
Il nous faut calculer le taux proportionnel entre le taux annuel et le taux semestriel. Taux proportionnel : 0.012 * 1/2 (car il y a deux semestres dans une année) = 0.006 < 0.075. Donc le taux semestriel était plus avantageux.

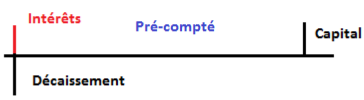
3. Matthieu souhaite disposer de 5 000 € dans un an au taux d'intérêt simple mensuel de 4%. Combien doit-il déposer sur son livret d'épargne ?
   On utilise toujours la même formule $V_n = V_0 * (1 + n * i)$ en isolant l'inconnu de l'équation, ici V_0
   Soit V_0 son capital de départ. Matthieu souhaite que :
   $V_0 * 12 * 0.04 + V_0 = 5000$ soit $V_0 = \frac{5000}{1+12*0.04} = 3378,38$.
4. Matthieu dispose de 4 800 € et souhaite réaliser dans un an un investissement de 5 000 €. A quel taux d'intérêt simple trimestriel doit-il placer son argent pour que la valeur acquise de son épargne lui permette de réaliser son investissement au bout d'un an ?
   On utilise toujours la même formule $V_n = V_0 * (1 + n * i)$ en isolant l'inconnu de l'équation, ici i
   Il souhaite obtenir 200 euros en quatre trimestres soit 50 euros par trimestre. On cherche donc i tel que $i * 4800 = 50$ d'où $y = 1.04$.

Exercice 2 : Taux d'intérêt précompté et postcompté

1. La cafétéria de l'université lance un emprunt auprès des étudiants de 80 000 € au taux postcompté de 10%. Combien devra-t-elle rembourser au bout de 4 mois si les intérêts sont postcomptés ?
   Note : les taux pré et postcomptés sont habituellement (sauf indication contraire) sur une base annuelle.
   Les intérêts sont payés en fin de période avec le remboursement du capital. Donc

$$C_n = C_0 * \left(1 + \frac{0.1 + 30 * 4}{360}\right) = 82666.$$





2. Sous la pression des syndicats étudiants, les intérêts sont désormais précomptés au taux d'intérêt annuel *in fine* de 10 %. De quelle somme la cafétéria disposera-t-elle au début de ses 4 mois ?
   Dans ce cas :

$$C_0 = C_n * \left(1 - \frac{0.1 + 30 * 4}{360}\right) = 77333.$$

Exercice 3 : Taux d'intérêt composé et taux équivalent

1. Sarah dispose d'un capital de 10 000 € qu'elle place sur son LDD au taux d'intérêt annuel composé de 0,75%. De combien disposera-t-elle dans un an ? dans 4 ans ? dans 10 ans ? Thomas, qui est plus dépensier, réalise la même opération que Sarah mais retire systématiquement tous les intérêts générés par son placement. De combien disposera-t-il dans un an ? dans 4 ans ? dans 10 ans ?

   Cette fois on a des intérêts composés : les intérêts rapportent à leur tour des intérêts.

   Formule : $V_n = V_0 * (1 + r)^t$ avec r le taux d'intérêt et t la durée du placement.

   Sarah.

Echéance	Gain	Somme disponible
1 an	75	$10075 = 10000 * (1 + 0.0075)^1$
4 ans	303.39	$10303.39 = 10000 * (1 + 0.0075)^4$
10 ans	775.82	$10775.82 = 10000 * (1 + 0.0075)^{10}$

   Thomas. Comme il enlève les intérêts au fur et à mesure c'est comme si on lui appliquait un taux simple.

Echéance	Gain	Somme disponible
1 an	75	10 075
4 ans	300	10 300
10 ans	750	10 750

2. Quel est le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 6% ? Est-ce différent d'un taux proportionnel ?

   Taux équivalent : taux d'échéance différente qui permet d'obtenir les mêmes intérêts qu'un autre taux sur une même période. Ici il faut que le atux mensuel appliqué sur 12 mois rapportent les mêmes intérêts qu'un taux annuel donc il faut que :

   $V_0 * (1 + T_m)^{12} = V_0(1 + t_a)^1$ d'où :

   Taux mensuel : $(1 + 0.06)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.49 \neq \frac{0.06}{12} = 0.50$ Un taux mensuel équivalent est différent d'un taux proportionnel.

3. Sarah investit 20 000 € dans la boutique de Thomas. Ils s'accordent sur un taux d'intérêt annuel de 10%. Au bout de six mois comme les affaires marchent bien, Thomas rembourse 20976,18 €. Sarah n'est pas contente. Elle estime qu'elle n'a perçu qu'un taux d'intérêt annuel de 9,76% tandis que Thomas lui affirme avoir payé un taux d'intérêt semestriel équivalent d'un taux nominal de 10%. Qui a tort ?

   Thomas paie 976.18 euros d'intérêt. S'il avait payé un taux proportionnel il aurait payé un taux égal à $0.10 * \frac{6}{12} = 0.05$. Dans ce cas il aurait dû payer $20000 * 1.05 = 21000$ euros. Si on calcule le taux d'intérêt semstriel équivalent on obtient :

   $$i_e = (1 + 0.10)^{\frac{6}{12}} = 4.88$$

   Ce qui implique des intérêts égaux à 976.18.

   Conclusion : il fallait définir au moment de l'accord quel type de taux d'intérêt il fallait appliquer en cas de remboursement anticipé. Thomas a raison, il a payé un taux d'intérêt semestriel équivalent. Sarah souhaite elle un taux d'intérêt proportionnel.

Exercice 4 : Prendre une décision sur la base de la valeur future

Supposons que le taux d'intérêt sans risque en vigueur sur le marché des capitaux soit de $r_f = 5$ %. Vous venez de trouver un studio dans la grande couronne parisienne que vous pourriez acquérir pour 150 000 €. Une rapide analyse du marché immobilier vous apprend que vous pourriez le revendre dans un an pour un montant, après frais de rénovation, de 200 000 €. En vous fondant sur la valeur future, quelle sera votre décision si :

1. Vous disposez d'une somme de 150 000 € sur votre compte en banque ?

   Si vous n'achetiez pas le pavillon, vous placeriez votre argent pour un an. Étant donné le taux en vigueur sur le marché, la valeur future de ce placement serait :

   $$VF = 150000 * 1.05 = 157500 < 200000$$

   .

   Si par contre, vous achetiez le pavillon, vous renonceriez au placement mais vous obtiendriez, dans un an, un cash-flow de 200 000 euros. La valeur future nette de l'achat (la différence entre le cash-flow futur de l'achat et celui d'un placement) est donc :

   $$200000 - 157500 = 425000$$

   .

   L'investissement est donc plus que rentable !
2. Vous ne disposez pas de la somme nécessaire pour acheter et rénover le pavillon ?

   La conclusion reste la même. Vous emprunter 150 000 euros, vous paierez 7500 d'intêret. La valeur finale nette est donc la même après remboursement de l'emprunt.

Exercice 5 : Valeur présente, future et actuelle nette

A partir des données de l'exercice précédent :

1. Calculez la VAN du projet. Que décidez-vous ?

   La VAN est égale à :

   $$VAN = -150000 + \frac{200000}{1.05} = 40476$$

   La VAN est positive, donc le projet doit être réalisé.
2. Si vous ne disposez d'aucune ressource, combien emprunteriez-vous pour pouvoir disposer immédiatement de la VAN du projet ?

   Il suffit d'emprunter la VAN du produit de la vente. Soit :

   $$VA = \frac{200000}{1.05} = 190476.$$

   On consacre 150000 à acheter le studio et il reste 40476 soit la VAN calculée précédemment.

Ouverture économétrique : Estimer l'équation de Fisher

1. Donner l'équation de Fisher ? Comment l'obtient-on ? On a

   $$S_1^r = \frac{S_0 * (1 + i_n)}{1 + \pi} = S_0(1 + i_r)$$

D'où via le développement limité de $\frac{1}{1+\pi} = 1-\pi$ pour π petit $S_0(1+i_n)(1-\pi) = S_0(1+i_r)$ donc $1 + i_r \simeq 1 + i_n - \pi$ (on néglige les produits des taux qui sont considérés comme petits.

Ainsi $i_n = i_r + \pi$.

2. Dans l'introduction de l'article "Understanding the Fisher Equation", Journal of Applied Econometrics, 2004, p. 869-886, les auteurs expliquent pourquoi il est difficile empiriquement de tester la validité de l'équation de Fisher. Pourriez-vous récapituler leurs arguments ?

   Dans l'équation de Fisher c'est linflation anticipée qui est primordiale. Or l'information disponible concerne l'inflation réalisée et non pas anticipée. On ne mesure donc pas la bonne chose.

   Les auteurs développent aussi l'idée que l'inflation anticipée est moins volatile que l'inflation réalisée qui subit des chocs non anticipés au préalable.

3. Quel type de procédure proposent-ils de mettre en place ?

   Ils mettent en place une procédure en plusieurs étapes. A partir des données d'inflation réalisée et des données d'inflation anticipée, ils estiment une inflation anticipée qui est plus lisse que l'inflation réalisée (purgée des chocs inattendus). Ils corrigent ensuite de biais induit puis ils testent la relation en question.

4. Avec leur procédure, valident-ils l'équation de Fisher ? (lire aussi la conclusion)

   Non ils ne le valident pas. Les trois termes ne sont pas cointégrés (il n'y a pas de relation telle l'équation de Fisher qui les relie).