Table des matières

Chapitre 1 Aux sources de la croissance 1
1 Introduction 1
2 Les facteurs de production 8
2.1 La fonction de production 8
2.2 La demande de facteurs 9
2.3 Les coûts d'ajustement 12
3 La comptabilité de la croissance 14
3.1 La décomposition de Solow 14
3.2 Les TIC 18
4 Conclusion 19

Chapitre 2 L'équilibre intertemporel 21
1 Introduction 21
2 La croissance en déséquilibre 22
2.1 Le modèle de Domar 22
2.2 Le principe du modèle de Harrod 23
3 La croissance néoclassique 24
3.1 Le cadre 25
3.2 Les comportements 26
3.3 L'équilibre 27
3.4 La dynamique de l'économie 30
3.5 La règle d'or d'accumulation 33
3.6 La convergence 35
4 Croissance, inégalité et taxation du capital 37
4.1 L'imposition dans le long terme 37
4.2 Le modèle classique d'épargne 38
4.3 Capitalistes et travailleurs 39
4.4 Incidence de la fiscalité 41
5 Exercices et problèmes 42
5.1 Investissement et q de Tobin 42
5.2 La comptabilité de la croissance 46
5.3 Le modèle de Solow 50
6 Repères bibliographiques 53

Chapitre 3 Une perspective intergénérationnelle 55
1 Introduction 55
2 Le modèle à deux périodes 57
2.1 Les contraintes budgétaires 58
2.2 L'optimum individuel 58
2.3 Salaire, consommation et épargne 59
2.4 Épargne et taux d'intérêt 60
2.5 Le comportement d'un agent jeune 62
3 Des générations imbriquées 62
3.1 Les individus vieux 62
3.2 Les entreprises 63
4 L'équilibre intertemporel 64
5 L'optimalité 67
5.1 La règle d'or d'accumulation 67
5.2 L'efficacité dynamique 68
6 Une application à la question des retraites 70
6.1 Retraite et accumulation du capital 70
6.2 Transition répartition/capitalisation 72
6.3 La TVA sociale 74
7 Conclusion 77
8 Exercices et problèmes 77
8.1 Retraite et croissance 77
8.2 Retraite et vieillissement 83
8.3 Logement et croissance 89
8.4 Accumulation et développement 92
9 Repères bibliographiques 94

Chapitre 4 Consommation et épargne 95
1 Introduction 95
2 Les contraintes de budget 96
2.1 Contrainte de budget instantanée 96
2.2 Contrainte de budget intertemporelle 97
2.3 La contrainte de Ponzi 98
3 Deux applications 99
3.1 Taxes équivalentes et TVA sociale 99
3.2 Équivalence ricardienne 100
4 La consommation optimale 103
4.1 Le problème du ménage 103
4.2 L'évolution de la consommation 104
4.3 Le niveau de la consommation 105
4.4 Cycle de vie et revenu permanent 107
5 Annexe 109
5.1 L'hypothèse d'agent représentatif 109
6 Exercices et problèmes 110
6.1 Impôt et dette 110

6.2 Consommation et cycle de vie 110
6.3 Liquidité et paniques bancaires 115
7 Repères bibliographiques 120

Chapitre 5 Épargne et accumulation 121
1 Introduction 121
2 Le cadre 123
2.1 La dynamique du capital par tête 123
2.2 Les préférences du ménage 123
3 L'optimum social 124
3.1 Le problème du planificateur 124
3.2 Les conditions du premier ordre 125
3.3 La condition d'Euler 126
3.4 La condition de transversalité 128
3.5 Les situations stationnaires 128
3.6 La dynamique globale 129
3.7 La dynamique locale 131
4 L'équilibre décentralisé 132
4.1 Le comportement de l'entreprise 132
4.2 Le problème du ménage 132
4.3 Optimalité de l'équilibre 134
5 Deux exercices de politique budgétaire 134
5.1 Dépense financée par un impôt forfaitaire 134
5.2 Dépense financée par un impôt distorsif 137
6 Conclusion 138
7 Annexes 139
7.1 Le problème du planificateur 139
7.2 Élasticité de substitution intertemporelle 140
7.3 La contrainte de budget intertemporelle 141
7.4 Chocs anticipés et revenu permanent 142
8 Exercices et problèmes 142
8.1 Le modèle à horizon infini 142
8.2 La TVA sociale dans le long terme 148
8.3 Les effets redistributifs de la TVA sociale 162
8.4 L'exploitation des ressources épuisables 168
9 Repères bibliographiques 175

Chapitre 6 Dépense, déficit et dette publique 177
1 Introduction 177
2 Déficits, épargne et intérêt 179
2.1 Déficit primaire et épargne agrégée 180
2.2 Déficit primaire et intérêt 182
3 Dette, impôt et déficits 185
3.1 L'équivalence ricardienne 185
3.2 Altruisme intergénérationnel 189

4 Dynamique de la dette publique 191
4.1 La contrainte budgétaire de l'État 191
4.2 Soutenabilité de la politique budgétaire 192
4.3 Dette, efficacité et croissance 196
5 Annexes 197
5.1 Compte des administrations publiques 197
5.2 Les recettes fiscales 198
5.3 Du déficit à la variation de la dette 198
5.4 Dette publique et croissance 199
6 Repères bibliographiques 199

Chapitre 7 La monnaie dans le long terme 201
1 Introduction 201
2 Introduire la monnaie 203
2.1 Le modèle de Samuelson 204
2.2 Monnaie et contrainte de liquidité 209
2.3 Monnaie dans la fonction d'utilité 213
3 Monnaie et efficacité dynamique 215
3.1 Monnaie et capital 215
3.2 La monnaie et la règle d'or 215
3.3 La fragilité de l'équilibre monétaire 217
4 Le seigneuriage 218
4.1 La taxe inflationniste 219
4.2 Le seigneuriage 219
5 Annexe 221
5.1 Seigneuriage au XV^{e} siècle en France 221
6 Exercices et problèmes 223
6.1 Seigneuriage, inflation et hyperinflation 223
7 Repères bibliographiques 228

Chapitre 8 Cohérence de la politique économique 229
1 Introduction 229
2 Une première intuition 231
3 Une application à la politique monétaire 233
3.1 La courbe de Phillips 233
3.2 La cohérence temporelle de la politique monétaire 234
3.3 Règles de politique économique 237
4 Crédibilité et réputation 237
4.1 Le cadre 238
4.2 Le dévoilement de la Banque 238
4.3 Asseoir sa réputation 239
5 Délégation et indépendance 241
5.1 Stabiliser l'activité 241
5.2 La solution cohérente 242
5.3 La solution avec engagement 243

5.4 Délégation de la politique monétaire 244
6 Économie politique 246
6.1 Le cas d'électeurs naïfs 246
6.2 Le cas d'électeurs rationnels 247
7 Exercices et problèmes 249
7.1 Crédibilité de la politique monétaire 249
8 Repères bibliographiques 251

Chapitre 9 Fluctuations, cycles réels et monétaires 253
1 Introduction 253
2 Le courant des cycles réels 255
2.1 Faits et présupposés 255
2.2 La persistance de chocs temporaires 257
2.3 Emploi et activité 262
3 Neutralité des chocs monétaires 263
3.1 Un cadre déterministe 264
3.2 Un cadre stochastique 265
4 Annexe 267
4.1 Les cycles répertoriés par le NBER 267
5 Exercices et Problèmes 269
5.1 Anticipations rationnelles 269
6 Repères bibliographiques 270

Chapitre 10 Anticipations et fluctuations 271
1 Introduction 271
2 Fluctuations endogènes d'équilibre 272
2.1 Fluctuations endogènes déterministes 272
2.2 Équilibres à taches solaires 277
3 Relâcher l'hypothèse d'anticipations rationnelles 279
3.1 Hétérogénéité et stabilisation 279
3.2 Justifier la perfection des prévisions 281
3.3 Découvrir l'équilibre 283
4 Conclusion 287
5 Annexe 287
5.1 Élasticités de l'offre de travail 287
6 Exercices et problèmes 288
6.1 Stabilité et liquidité 288
7 Repères bibliographiques 296

Bibliographie 297

Ce manuel est le support du cours de macroéconomie de 2^{e} année de l'ENSAE. Il s'intéresse à l'analyse macroéconomique dans un cadre dynamique, pour l'essentiel aux fluctuations de moyen terme et la croissance de long terme. Il doit beaucoup aux assistants de macroéconomie de l'école, notamment Johan Hombert, et aux nombreux retours des élèves. Il s'inscrit dans la tradition des chapitre de l'école en insistant plutôt sur l'élaboration du cadre de l'analyse économique. La plupart des chapitres sont suivis d'exercices d'application et de problèmes. Les exercices sont issus des travaux dirigés associés au chapitre. Ils ont été corrigés par Johan Hombert. Les problèmes sont des annales d'examens. Ils cherchent à illustrer comment les méthodes du chapitre permettent de discuter certaines questions de politique économique actuelle.

CHAPITRE 1

Aux sources de la croissance

1. INTRODUCTION

Que savons-nous de la croissance économique sur très longue période ? D'un point de vue quantitatif, le travail le plus exhaustif est sans doute celui qu'a coordonné durant de nombreuses années Angus Maddison pour l'OCDE. Maddison (2001) dresse un tableau de l'évolution de la population et du revenu agrégé sur très longue période, remontant parfois dans l'Antiquité jusqu'au début de notre ère. Jusqu'en 1820, ces informations sont bien sûr souvent parcellaires et les méthodes retenues pour les obtenir sont parfois tellement acrobatiques que la quantification s'apparente à l'illusion !

Bairoch (1985) estime ainsi que la population urbaine de Jericho il y a 10 000 ans devait se situer entre 1 000 et 3 000 habitants. Il le fait à partir de la superficie délimitée par les murs d'enceintes de la ville et d'une mesure de densité construite en exploitant la part de la surface construite (par opposition aux jardins), du type d'habitat et du nombre de personnes par habitation (taille de la famille, domesticité, etc.) et parfois de ce que l'on pouvait savoir du nombre d'étages des habitations, du nombre de pièces par habitation, et du nombre de personnes par pièce.

Mais les données exploitées sont le plus souvent de nature fiscale. Les impôts fonciers ou ceux qui sont liés à la composition familiale, par exemple, permettent d'avoir une idée de la production, de la densité de population, et ainsi de la population. Les historiens de l'économie antique ont pu donner ainsi des ordres de grandeur pour la population de Rome. On sait que l'administration romaine recensait sa population : Marie enfanta à Bethléem, où elle était avec Joseph, pour se faire recenser. Cependant, les données issues du recensement sont difficilement utilisables. Les recensements n'étaient pas exhaustifs puisqu'ils ne comprenaient que les citoyens dont le capital était suffisamment important pour qu'ils soient mobilisables par l'armée ; en

outre, ce capital a varié (il a très certainement baissé à partir du IIe siècle avant J.-C.) et n'est qu'imparfaitement connu. Pour ces raisons, et également parce que le champ couvert par les recensements variait, semble-t-il, d'un recensement à l'autre, les historiens considèrent en général avec une certaine suspicion les données recueillies par ce canal[1]. On regarde avec plus de bienveillance les estimations de la population romaine au début de notre ère qui s'appuient sur le système de distribution de blé (d'abord à un prix réglementé, sous l'impulsion de C. Gracchus, et ensuite gratuitement) à chaque citoyen romain. La plupart des citoyens romains y avaient droit (les riches comme les pauvres). Les données sont cependant là aussi très parcellaires. Elles apparaissent souvent au détour d'une phrase, parce que Cicéron s'oppose à la gratuité des distributions décidée par son ennemi Clodius, ou que Suétone rappelle que César a divisé par deux le nombre de bénéficiaires pour le ramener à 150 000 ! Ces mises en garde en tête, en tenant compte des femmes, des enfants et des esclaves (et aussi de la fraude ou des vagues d'affranchissement que la loi aurait impliquées) il y aurait eu de l'ordre de 1 million d'habitants à Rome à la fin de la République, au début de notre ère (G. Rickman, 1980, *The corn supply of ancient Rome*, Oxford University Press). Bairoch (1985) estime quant à lui que Rome pouvait compter jusqu'à 1,3 million d'habitants vers 200 après J.-C.. Elle ne comptait plus que 35 000 habitants en l'an mil, et moins de 20 000 au XIVe siècle. Il faudra attendre 1820 et la révolution industrielle pour qu'une ville d'Europe, Londres, atteigne une population supérieure à 1 million d'habitants.

Il faudra attendre plus longtemps encore avant de voir se profiler l'architecture d'une Comptabilité Nationale fiable. Maddison (2004) la fait remonter au XVIIe siècle lorsque William Petty a cherché à estimer la population et les revenus en Angleterre et au Pays de Galles pour se faire une idée des ressources mobilisables en cas de guerre contre la Hollande. Peu après William Petty, à la toute fin du XVIIe siècle, Gregory King, qui était chargé d'examiner la validité des titres de noblesse lors des successions, en vue d'un prélèvement pesant sur les naissances, les mariages et les décès, a utilisé l'information qu'il avait collectée pour construire un système de comptes nationaux primitif.

Ces exemples illustrent bien les méthodes et le type de données qui nous permettent de reconstruire une histoire quantitative de notre croissance jusqu'au début du XIXe siècle. En revanche, à compter de 1820, année qui marque l'entrée dans ce que Maddison appelle la « période capitaliste », les données sont semble-t-il plus fiables, mais ce n'est qu'au début du XXe siècle que la puissance administrative autorise de véritables comptabilités nationales.

Si l'on s'accorde maintenant à reconnaître que c'est seulement à partir du début du XIXe siècle que la croissance devient réellement plus forte et à ressembler à ce que nous connaissons aujourd'hui, il est évidemment plus difficile de s'entendre sur le passé plus lointain. Deux théories principales se font concurrence. D'une part, il y a la vue défendue par Arnold Toynbee selon laquelle le produit par tête aurait partout stagné avant 1820, voire peut-être légèrement régressé, du fait de l'existence d'une trappe malthusienne dans laquelle toute hausse du produit aurait été intégralement

1. La biographie des Gracques par C. Nicolet est sur ce point particulièrement instructive.

rattrapée par une hausse de la population ramenant le produit par tête au seuil de subsistance. Ce point de vue, privilégié par l'École des Annales, a reçu un écho particulier en France. Fernand Braudel a ainsi penché dans un premier temps en faveur d'une stagnation du produit par tête en France de 1500 à 1800 ; de même qu'Emmanuel Le Roy Ladurie pour la période 1300-1720 (année de la faillite du système de Law) dans son étude sur la paysannerie dans le Languedoc. Cette opinion est parfois validée par l'analyse des restes humains retrouvés.

La seconde théorie plaide quant à elle en faveur d'une croissance lente du produit par tête depuis l'an mil environ, et non pas une phase de stagnation.

Qu'en est-il en fait ? En guise de première intuition, les démographes ont l'habitude de se référer au poids de la population urbaine. Selon Bairoch (1985), un nombre très restreint de villes européennes (hors Russie) pouvaient compter plus de 100 000 habitants en l'an mil[1]. La proportion de population européenne vivant en ville aurait alors été quasiment nulle. En 1820, elle était proche de 11 % ce qui témoigne non seulement de l'existence d'un surplus de production rural qui permet de nourrir la ville, mais aussi d'une activité économique qui n'est plus uniquement agricole (même si une partie de l'activité de la population urbaine relevait encore de l'agriculture).

La croissance du produit par tête en Europe serait donc antérieure à 1820. Cette hypothèse, qui repose sur le lien étroit entre la productivité agricole et le développement urbain, est confirmée par d'autres exercices auxquels se livre Paul Bairoch. Selon lui, les premières villes seraient apparues au début du néolithique, vers 8 000 avant J.-C., donc au moment où l'agriculture s'est développée. L'une des thèses qu'il privilégie est que la pression démographique aurait rendu la cueillette et la chasse du paléolithique insuffisantes pour nourrir la population. La première ville du monde aurait été Jéricho. Sa superficie, de l'ordre de 3 hectares ($3 \times 100\,\mathrm{m}^2$), associée à une hypothèse faite sur la densité de population, posée à environ 300 habitants par hectare, donne une population urbaine de 1 000 habitants. Trois mille ans plus tard, les grandes villes sumériennes couvraient une superficie de plus de 40 hectares ; et de plus de 100 hectares en 2000. Une densité de population urbaine plus élevée aurait permis à la ville d'Our d'atteindre 24 000 habitants en 2800, et plus de 100 000 vers 2000.

Le développement de l'agriculture est une condition du développement urbain via l'existence d'un « surplus agricole », c'est-à-dire d'une quantité de nourriture disponible en plus de ce qui est nécessaire à la subsistance du producteur et de sa famille[2].

1. Le tableau 7.1 de Bairoch (1985) en recense une seule. À l'époque, environ 40 % de la population urbaine européenne (hors Russie) aurait été en Espagne. La plus grande ville européenne était Cordoue, avec 400 à 500 000 habitants, puis venait Séville, avec une population de 100 000 habitants. Kiev, Ratisbonne et Venise auraient chacune compté de l'ordre de 50 000 habitants. Ensuite, viennent des villes de moindre importance, comme Londres ou Paris, avec des populations de l'ordre de 20 à 25 000 habitants. Les lois portant sur la taille des villes sont souvent à la base des estimations de population sur de plus vastes zones. La plus connue est peut-être la loi de Zipf, qui énonce que si la plus grosse ville compte N habitants, la $n$ème plus grosse ville en compte N/n. Cf. Bairoch (1985).

2. Certains historiens, par exemple J. Cauvin, pensent néanmoins que Jéricho aurait pu précéder l'agriculture, les hommes s'assemblant pour des raisons culturelles ou religieuses et vivant de la chasse et de la cueillette. Sur une plus grande échelle, toutefois, un lien étroit entre surplus agricole et développement urbain semble nécessaire.

Mais l'activité agricole est en même temps à l'origine d'un phénomène de sédentarisation s'accompagnant d'une hausse de la densité de population. Cette plus forte densité joue un rôle crucial dans le développement urbain. Pour s'en convaincre, supposons l'existence d'un surplus agricole de 10 % dans les régions rurales : pour une densité de population de 0,1 habitant par km^2, qui semble avoir été celle de l'Europe prénéolithique, il faut 100 000 km^2 pour ravitailler une ville de 1 000 habitants, ceci si l'on ne tient pas compte des coûts de transport[1].

Ces coûts ne peuvent cependant pas être négligés : c'est ce que Bairoch appelle la « tyrannie de la distance ». Prenons un homme qui peut porter une charge de 35 à 40 kg au plus ; s'il consomme 1 kg par jour pour sa propre subsistance, alors en comptant la nourriture du retour, son chargement sera épuisé au bout de vingt jours. S'il effectue 30 à 40 km par jour à pied, une ville ne peut donc tirer sa subsistance que d'un disque de rayon de 600 à 800 km tout au plus. La situation n'est guère meilleure avec un animal (qui permet d'augmenter la charge transportée mais qu'il faut nourrir), mais elle le devient avec un chariot à roue. On comprend pourquoi les premières villes étaient souvent en aval d'un fleuve et dans des régions où la contrainte de chauffage n'était pas trop pressante. Selon Bairoch, si l'on prend en compte les coûts de transport, il faut cette fois 200 000 km^2 pour ravitailler une ville de 1 000 habitants. Avec l'agriculture, la densité de population passe à 200 habitants par km^2 et même à 400 dans les régions très fertiles ; sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, le rayon du disque se réduit alors à 1 200 km^2 !

La figure 1, construite en utilisant les données de Maddison[2], plaide elle aussi en faveur d'une croissance économique antérieure à la révolution industrielle. Elle suggère que le PIB par habitant n'aurait que peu varié durant le premier millénaire en France ; il aurait même baissé sur cette période. Mais, entre l'an 1000 et 1820, il aurait doublé, passant de 500 euros de 2006 à 1200 euros de 2006. Entre 1820 et 1950, il a été multiplié par 5 ; entre 1950 et aujourd'hui, par environ 5 également, pour atteindre 27 000 euros en 2006. Cette figure illustre clairement la très forte rupture du rythme de croissance que la France a connue dans les années 50.

1. Elle joue peut-être un rôle plus général, selon J. Diamond, puisque la coexistence des hommes et des animaux aurait fait que l'homme est devenu moins sensible aux maladies.

2. Ces données sont accessibles en ligne à l'adresse `http://www.ggdc.net/maddison/` ; elles sont régulièrement révisées. Maddison (2001), Annexe B, accessible en ligne à la même adresse, précise comment ces données sont construites pour la période antérieure à 1820. Pour la période 1700-1820, Maddison utilise les estimations des taux de croissance du produit par tête de J.C. Toutain, qui travaillait sous la direction de François Perroux dans les années 50. Pour les siècles antérieurs, Maddison reste assez critique à l'égard des travaux de l'École des Annales, parce qu'elle priviliégie les études régionales et qu'elle accorde une trop grande importance aux vues malthusiennes ; par exemple, Fernand Braudel s'appuyait sur la série du prix du blé à Paris durant trente ans pour en inférer l'histoire du produit par tête en France sur près de trois siècles ! Maddison finit par trancher en calquant l'évolution de la France de l'an 1000 au début du XVIII^e siècle sur celle de la Belgique, dont les données fiscales et de recensement sont apparemment plus fiables ... Enfin, pour le tout début de l'ère chrétienne, le travail de Goldsmith (1984) pour l'Empire romain donne un taux d'urbanisation de l'ordre de 5 % dans l'Europe romaine, ce qui conduit à privilégier l'hypothèse d'une régression du produit par tête durant le premier millénaire, le taux d'urbanisation étant quasi nul en l'an 1000. Même si, nous l'avons vu, les méthodes divergent, Bairoch (1985) parvient à une conclusion voisine : selon lui, les invasions barbares n'auraient joué qu'un rôle marginal dans le déclin économique de l'Europe entre 476 et l'an mil, la cause principale étant plutôt à attribuer à la prise de contrôle de la Méditerranée par les musulmans.

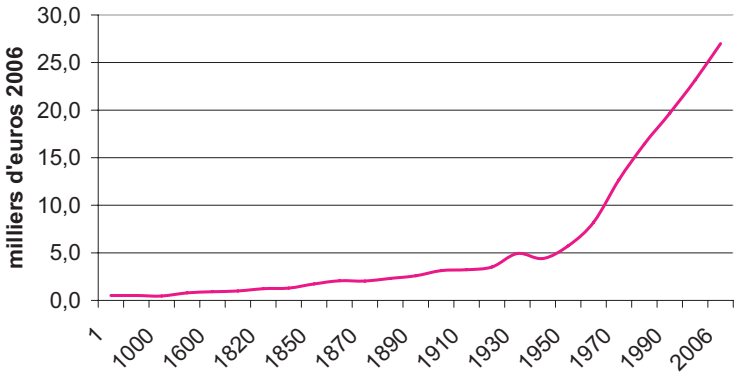


FIGURE 1
PIB par tête en France 1 : 2006

Les données du tableau 1, extraites elles aussi de Maddison (2001), montrent que cette histoire se retrouve dans la plupart des pays occidentaux. On note également que le développement s'accompagne d'un écart entre les économies occidentales et le reste du monde de plus en plus important au fur et à mesure que le temps passe.

Plutôt que la vision malthusienne, c'est donc à l'idée d'une croissance exponentielle dont il situe les prémices aux alentours de l'an 1000 qu'adhère Maddison. C'est dans l'Espagne du XVI^{e} siècle que la croissance aurait véritablement commencé son envol, relayée par la Hollande au XVII^{e} siècle, dont le taux de croissance annuel du PIB par tête aurait été de 0,2 % ; puis par l'Angleterre, avec un taux de croissance annuel de l'ordre de 1,2 % entre 1820 et 1913 (au Royaume-Uni) ; et enfin par les EU au XX^{e} siècle, avec un taux de croissance annuel supérieur à 2 % entre 1913 et 1998.

En France, le taux de croissance annuel du produit par tête a été de 1,1 % entre 1820 et 1906 et de 2,1 % au XX^{e}. Des écarts de taux de croissance qui peuvent de prime abord nous paraître insignifiants ont des effets saisissants sur longue période : ainsi, notre PIB par tête est aujourd'hui presque 10 fois supérieur à celui de 1906 ; il ne serait que 3 fois supérieur pour un taux de croissance annuel de 1,1 % (ce qui nous placerait à peu près dans la même situation que celle du Qatar ou de la Slovaquie aujourd'hui) et le serait de plus de 20 fois pour un taux de 3,3 % (soit plus de deux fois le PIB par tête des EU aujourd'hui). Alternativement, il faudrait 63 ans pour que notre PIB par tête double pour un taux de croissance annuel de 1,1 %, 33 à 2,1 %, et 22 à 3,1 % ; le PIB par tête chinois est passé de 4197 à 4803 dollars (de 1990) entre 2005 et 2006, ce qui correspond à un taux de croissance de 14,4 % : à ce taux, il faudra seulement 5 ans pour que double le PIB par tête chinois !

À quoi faut-il attribuer les deux derniers siècles de croissance ? Des éléments de réponse nous sont donnés dans le tableau 2. Alors que les heures travaillées par tête ont beaucoup baissé depuis le début du XX^{e} siècle, la productivité moyenne du travail est entre 20 et 40 fois plus élevée aujourd'hui qu'en 1913. Ce n'est pas l'exploitation de terres supplémentaires qui permet de rendre compte de cette évolution, et si l'efficacité du travail, mesurée par l'éducation, a effectivement partout augmenté,

	1000	1500	1820	1870	1913	1950	1973	2001
Levels of per-capita (1990 international dollars)								
Western Europe	400	771	1,204	1,960	3,458	4,579	11,416	19,256
Western offshoots	400	400	1,202	2,419	5,233	9,268	16,179	26,943
Japan	425	500	669	737	1,387	1,921	11,434	20,683
West	**405**	**702**	**1,109**	**1,882**	**3,672**	**5,649**	**13,082**	**22,509**
Asia (excluding Japan)	450	572	577	550	658	634	1,226	3,256
Latin America	400	416	692	681	1,481	2,506	4,504	5,811
E Europe & f USSR	400	498	686	941	1,558	2,602	5,731	5,038
Africa	425	415	420	500	637	894	1,410	1,489
Rest	**441**	**538**	**578**	**606**	**860**	**1,091**	**2,072**	**3,372**
Word	**436**	**566**	**667**	**875**	**1,525**	**2,111**	**4,091**	**6,049**
Interregional spread	1.1:1	1.9:1	2.9:1	4.8:1	8.2:1	14.6:1	13.2:1	18.1:1
West/Rest spread	0.9:1	1.3:1	1.9:1	3.1:1	4.3:1	5.2:1	6.3:1	6.7:1
Population (millions)								
Western Europe	25	57	133	188	261	305	358	392
Western offshoots	2	3	11	46	111	176	251	340
Japan	8	15	31	34	52	84	109	127
West	**35**	**75**	**175**	**268**	**424**	**565**	**718**	**859**
Asia (excluding Japan)	175	268	679	731	926	1,299	2,140	3,527
Latin America	11	18	22	40	81	166	308	531
E Europe & f USSR	14	30	91	142	236	267	360	411
Africa	32	47	74	90	125	227	390	821
Rest	**233**	**363**	**867**	**1,004**	**1,367**	**1,959**	**3,198**	**5,290**
Word	**268**	**438**	**1,042**	**1,272**	**1,791**	**2,524**	**3,916**	**6,149**
West/word (%)	13.0	17.2	16.8	21.1	23.7	22.4	18.3	14.0
Levels of GDP (millions of 1990 international dollars)								
Western Europe	10.2	44.2	160.1	367.6	902.3	1,396	4,096	7,550
Western offshoots	0.8	1.1	13.5	111.5	582.9	1,635	4,058	9,156
Japan	3.2	7.7	20.7	25.4	71.7	161	1,243	2,625
West	**14.1**	**53.0**	**194.4**	**504.5**	**1,556.9**	**3,193**	**9,398**	**19,331**
Asia (excluding Japan)	78.9	153.6	392.2	401.6	608.7	823	2,623	11,481
Latin America	4.6	7.3	15.0	27.5	119.9	416	1,389	3,087
E Europe & f USSR	5.4	15.2	62.6	133.8	367.1	695	2,064	2,072
Africa	13.7	19.3	31.2	45.2	79.5	203	550	1,222
Rest	**102.7**	**195.3**	**501.0**	**608.2**	**1,175.2**	**2,137**	**6,626**	**17,862**
Word	**116.8**	**248**	**695.3**	**1,112.7**	**2,732.7**	**5,330**	**16,024**	**37,194**
West/word (%)	12.1	21.3	28.0	45.3	57.0	59.9	58.6	52.0

TABLEAU 1
Population et revenu dans le monde depuis l'an mil

cela n'est pas non plus suffisant pour en rendre compte. Clairement, ce qui ressort du tableau 2, c'est que l'accumulation du capital (que ce soit les machines ou au travers de nouveaux bâtiments – construits à des fins non résidentielles) a littéralement explosé : le facteur est supérieur à 100 pour les machines et l'équipement, et à 20 pour les constructions non résidentielles. Cette forte intensité en capital des biens produits s'est accompagnée d'une croissance très importante des exportations[1].

	UK	**USA**	**Japan**	**UK**	**USA**	**Japan**
	Gross stock of machinery and equipment per capita (1990 $)			Gross stock of nonresidential structures per capita (1990 $)		
1820	92	87	n.a.	1,074	1,094	n.a.
1870	334	489	94[a]	2,509	3,686	593[a]
1913	878	2,749	329	3,215	14,696	852
1950	2,122	6,110	1,381	3,412	17,211	1,929
1973	6,203	10,762	6,431	9,585	24,366	12,778
1998	11,953	25,153	29,987	21,066	35,810	49,042
	Primary energy consumption per capita (tons of oil equiv.)			Average years of educationc per person employed		
1820	.61	2.45[b]	0.20	2.00	1.75	1.50
1870	2.21	2.45	0.20	4.44	3.92	1.50
1913	3.24	4.47	0.42	8.82	7.86	5.36
1950	3.14	5.68	0.54	10.60	11.27	9.11
1973	3.93	8.19	2.98	11.66	14.58	12.09
1998	3.89	8.15	4.04	15.10	19.46	16.03
	Land area per capita (hectares)			Exports per capita (1990 $)		
1820	1.48	48.1	1.23	53	25	0
1870	1.00	23.4	1.11	390	62	2
1913	0.69	9.6	0.74	862	197	33
1950	0.48	6.2	0.44	781	283	42
1973	0.43	4.4	0.35	1,684	824	875
1998	0.41	3.5	0.30	4,680	2,755	2,736
	Hours worked per head of population			GDP per work hour (1990 $)		
1820	1,153	968	1,598	1.49	1.30	0.42
1870	1,251	1,084	1,598	2.55	2.25	0.46
1913	1,181	1,036	1,290	4.31	5.12	1.08
1950	904	756	925	7.93	12.65	2.08
1973	750	704	988	15.97	23.72	11.57
1998	657	791	905	27.45	34.55	22.54

TABLEAU 2
Les déterminants de la croissance depuis 1820

1. Savoir si la croissance de la production a impliqué une hausse des exportations, ou bien a été impliquée par elle, est évoqué brièvement par Bairoch (1999) ; la réponse ne semble pas tranchée. Voir aussi le commentaire de J.C. Asselain dans le même livre, qui lie le commerce extérieur au protectionnisme de l'économie.

Le rôle joué par le capital dans la croissance économique est le fil directeur du chapitre. Dans ce chapitre, nous allons chercher à cerner la part de la croissance que l'on peut lui attribuer.

2. LES FACTEURS DE PRODUCTION

Le tableau 2 nous invite à regarder l'accumulation du capital comme source première de la croissance. Cependant, nous nous intéressons à la croissance pour ce qu'elle apporte aux possibilités de subsistance de la population. Si la population représente un volume de bouches à nourrir, elle représente aussi, par son travail, un facteur de production. C'est pour cela que nous allons nous concentrer sur les liens entre la production, le capital et la population (que l'on confondra avec la main-d'œuvre).

2.1. La fonction de production

À court et à moyen terme, le stock de capital est par définition donné ; la production dépend alors uniquement de la quantité de travail utilisée. À plus long terme, la demande de biens d'investissement a pour contrepartie une modification du stock de capital de l'entreprise. C'est cette politique d'investissement que nous allons décrire. Le comportement d'offre de capital (l'épargne) sera laissé dans l'ombre.

Au début de la période t, $t \geqslant 1$, l'entreprise dispose d'un stock de capital hérité du passé. Pour bien faire apparaître que les décisions relatives au capital qui seront prises lors de la période t ne pourront pas influencer le stock de capital mobilisable au chapitre de cette période, mais seulement celui que l'on pourra mobiliser dans le processus de production lors de la période suivante, nous noterons K_{t-1} le stock de capital disponible en t, servant comme facteur de production en t, mais choisi en $t-1$. Cette interprétation définit implicitement ce qu'est une période : sa durée est celle durant laquelle le stock de capital reste inchangé ; une période s'achève lorsque l'investissement porte ses fruits. En t, l'entreprise utilise L_t unités de travail qui, combinées avec le stock de capital existant, permettent de produire

$$Y_t = F(K_{t-1}, L_t) \tag{1.1}$$

biens finals.

Si l'on souhaite que le comportement d'une entreprise fictive se rapproche de celui de l'économie dans son ensemble, la fonction de production de type Cobb-Douglas, $Y_t = AK_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ (avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$) est communément retenue à un niveau très agrégé. Cela ne veut bien sûr pas dire qu'elle décrit correctement la technologie utilisée par chacune des entreprises que comprend l'économie dans son ensemble : cette fonction permet de reproduire plutôt bien les effets de substitution de facteurs entre les entreprises mais elle est moins performante lorsqu'il s'agit de rendre compte de ces substitutions à l'intérieur d'une entreprise donnée (« au niveau individuel ») – cf. Malinvaud (1998) pour une discussion.

Plus généralement, on supposera que $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ pour tout $\lambda \geqslant 0$ (les rendements d'échelle sont constants), que $F'_K(\cdot) \geqslant 0$ et $F'_L(\cdot) \geqslant 0$ (les rendements

marginaux de chaque facteur de production sont positifs), et enfin que $F''_{KK}(\cdot) \leqslant 0$ et $F''_{LL}(\cdot) \leqslant 0$ (ces rendements marginaux sont décroissants). Une fonction de production ayant ces trois propriétés est dite « néo-classique ». La fonction Cobb-Douglas est un exemple de fonction de production néo-classique.

Soit P_t le prix du bien final lors de la période t. La recette de l'entreprise au chapitre de la période t est donc égale à $P_t Y_t$.

Son coût de production lors de cette période a deux composantes : la première est relative à la rémunération du travail, la seconde à celle du capital. Soit W_t le salaire nominal versé en t par unité de travail. Il en coûte donc $W_t L_t$ à l'entreprise pour rémunérer ses travailleurs en t. Pour ce qui concerne le capital, nous ferons l'hypothèse simplificatrice qu'il n'existe pas de bien spécifique servant de capital : il n'existe qu'un seul bien, qui peut être soit consommé soit utilisé comme capital ; le prix du bien qui sert de capital est donc lui aussi égal à P_t. Pour se fixer les idées, on peut voir ce bien unique comme du blé, qui peut être consommé ou utilisé comme semence en vue d'une production ultérieure. Lors de la période t, l'achat de I_t unités de capital coûte donc $P_t I_t$; I_t est l'investissement brut, que l'on appelle « Formation Brute de Capital Fixe » en Comptabilité Nationale. L'utilisation du capital dans le processus de production s'accompagne en général d'une usure : on supposera que δK_{t-1} unités de capital sont détruites lorsque l'on utilise K_{t-1} unités de capital en t. Le paramètre δ est le « taux de dépréciation » du capital ; il est supposé invariant au cours du temps. Pour la France, ce taux est en moyenne de 10 à 15 % (nous verrons plus bas un exemple dans lequel, pour certains types de capital, il est beaucoup plus élevé). On peut donc écrire la dynamique du stock de capital :

$$K_t = K_{t-1} + I_t - \delta K_{t-1}. \tag{1.2}$$

La variation du stock de capital, $K_t - K_{t-1}$, n'est pas égale à l'investissement du fait de la dépréciation. Elle est égale à l'investissement net, $I_t - \delta K_{t-1}$, c'est-à-dire à l'investissement brut net de la dépréciation.

Au final, le profit (« net cash flow ») dégagé en t est égal à

$$P_t Y_t - w_t L_t - P_t I_t,$$

avec Y_t donné par (1.1) et I_t par (1.2).

Remarque 1.1 ***Production brute versus production nette***

L'écriture de ce profit fait apparaître qu'en fin de période t, il reste $(1-\delta)K_{t-1}$ unités de capital dans l'économie : par convention, Y_t représente une quantité produite nette du capital (il y a donc $Y_t + (1-\delta)K_{t-1}$ une fois que la production de t a eu lieu).

2.2. La demande de facteurs

Étant donné le stock de capital K_{t-1}, l'entreprise doit choisir en t le nombre d'unités de travail qu'elle va utiliser lors de cette période, L_t, et l'investissement, ou bien encore, de façon équivalente, le stock de capital K_t dont elle disposera lors de la prochaine période.

Si l'objectif de l'entreprise se réduit à maximiser son profit courant (précisément, le « net cash flow » courant), elle choisira évidemment $I_t = 0$: l'investissement implique une dépense et l'entreprise ne valorise pas le fait d'avoir un stock de capital plus important demain que celui qu'elle aurait sans investir. Cette politique n'est pas optimale dans le cas plausible où l'entreprise se soucie de son profit futur : à terme, elle n'aurait plus du tout de capital !

Pour prendre en compte le profit futur, on notera i_t le taux d'intérêt nominal en t : une unité de monnaie épargnée en $t-1$ rapporte $1+i_t$ unités de monnaie en t. Alternativement, la valeur d'une unité de monnaie en t du point de vue de la date $t-1$ est égale au nombre d'unités de monnaie qu'il faut placer en $t-1$ pour obtenir cette unité de monnaie en t, soit $1/(1+i_t)$. En notant

$$\iota_t = \prod_{j=1}^{t} (1+i_j),$$

la somme qu'il faut placer en 1 pour obtenir une unité de monnaie en t est donc égale à $1/\iota_t$ (avec la convention de notation que $i_1 = 0$).

Le problème de l'entreprise en $t = 1$ est alors de choisir une suite $(L_t, K_t, t \geqslant 1)$, associée à la condition initiale K_0 donné, qui maximise

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{P_t F(K_{t-1}, L_t) - W_t L_t - P_t (K_t - K_{t-1} + \delta K_{t-1})}{\iota_t}.$$

Cette expression donne le profit total qu'une entreprise dégage si elle produit perpétuellement, évalué en $t = 1$, c'est-à-dire une fois que les sommes dégagées en t sont converties en unités de monnaie de $t = 1$ (à l'aide de ι_t).

Si la fonction de production est concave, les conditions du premier ordre sont nécessaires et suffisantes. La condition du premier ordre relative au travail a la forme habituelle de la théorie microéconomique :

$$F'_L(K_{t-1}, L_t) = W_t / P_t. \tag{1.3}$$

Elle égalise la productivité marginale associée à une unité de travail supplémentaire (dans le membre de gauche) au coût marginal réel de cette unité, le salaire réel $w_t \equiv W_t/P_t$ qu'il faut verser au travailleur pour le rémunérer (dans le membre de droite).

Le choix en t de K_t a une nature intertemporelle : le coût de la dépense d'investissement intervient une période avant que le capital soit utilisé, et que l'entreprise puisse récupérer la recette associée. Ces deux termes apparaissent nettement en dérivant l'objectif par rapport à K_t :

$$-\frac{P_t}{\iota_t} + \frac{P_{t+1}}{\iota_{t+1}} (F_K(K_t, L_{t+1}) + (1-\delta)) = 0,$$

ou bien encore,

$$-1 + \frac{1}{1+i_{t+1}} \frac{P_{t+1}}{P_t} \left(F'_K(K_t, L_{t+1}) + (1-\delta)\right) = 0. \tag{1.4}$$

Le terme $(1+i_{t+1})\,P_t/P_{t+1}$ a une interprétation simple : si l'on possède un bien en t, qu'on l'échange contre de la monnaie (de sorte que l'on récupère P_t unités de monnaie), et qu'on place cette monnaie sur le marché financier au taux d'intérêt nominal i_{t+1}, on obtient $(1+i_{t+1})\,P_t$ unités de monnaie en $t+1$, et donc $(1+i_{t+1})\,P_t/P_{t+1}$ biens en $t+1$. Il s'ensuit que $(1+i_{t+1})\,P_t/P_{t+1}-1$ est le supplément de biens dont on pourra disposer en $t+1$ si l'on place un bien en t : c'est le « taux d'intérêt réel ». On le notera r_{t+1}. Au final, en plaçant un bien en t sur le marché financier, on récupère $(1+i_{t+1})\,P_t/P_{t+1}\equiv 1+r_{t+1}$ biens en $t+1$. La condition du premier ordre (1.4) se réécrit :

$$F'_K(K_t,L_{t+1})=r_{t+1}+\delta. \tag{1.5}$$

Cette condition fait apparaître la productivité marginale du capital (dans le membre de gauche). Il est pour cette raison tentant de lire le membre de droite, $r_{t+1}+\delta$, comme le coût marginal du capital. C'est effectivement ce que l'on appelle le « coût d'usage du capital » : tout se passe formellement comme si l'achat et l'utilisation d'une unité de capital en t coûtait $r_t+\delta$ à l'entreprise lors de cette période.

Une interprétation équivalente consiste à voir l'entreprise en t comme louant K_{t-1} unités de capital au taux d'intérêt réel r_t. Elle reçoit K_{t-1} ; elle doit rendre $(1+r_t)K_{t-1}$ après utilisation du capital, mais il ne lui reste plus alors que $(1-\delta)K_{t-1}$: l'utilisation de K_{t-1} unités de capital lui coûte $(1+r_t)K_{t-1}-(1-\delta)K_{t-1}=(r_t+\delta)K_{t-1}$.

Avec cette interprétation, le problème (intertemporel) de l'entreprise se ramène à un problème statique usuel : tout se passe comme si, lors de chaque période t, l'entreprise choisissait un couple (K_{t-1},L_t) qui maximise son profit,

$$P_tF(K_{t-1},L_t)-W_tL_t-P_t(r_t+\delta)K_{t-1},$$

ou bien encore,

$$F(K_{t-1},L_t)-w_tL_t-(r_t+\delta)K_{t-1}, \tag{1.6}$$

avec $w_t\equiv W_t/P_t$ le salaire réel en t. En $t=1$, elle ne choisit en fait que L_1 puisque K_0 est une donnée.

Puisque $F(\cdot)$ est à rendements d'échelle constants, on a :

$$F'_K(\lambda K,\lambda L)K+F'_L(\lambda K,\lambda L)L=F(K,L).$$

Au point $\lambda=1$,

$$F'_K(K,L)K+F'_L(K,L)L=F(K,L). \tag{1.7}$$

On retrouve la propriété d'épuisement du produit. Au point $\lambda=1/L$, $F(K/L,1)=F(K,L)/L$: la production par tête (en fait, par unité de travail), $F(K,L)/L$, est une fonction du stock de capital par tête $k\equiv K/L$. On notera $F(k,1)\equiv f(k)$.

Par définition, $F'_K(K/L,1)=f'(k)>0$; puisque la productivité marginale du capital est décroissante (avec le stock de capital agrégé K), on a aussi $f''(k)<0$. Puisque $F'_L(K,L)=f(k)-f'(k)k$, les deux conditions du premier ordre (1.3) et (1.5) se réécrivent respectivement :

$$f(k_t)-f'(k_t)k_t=w_t, \tag{1.8}$$

et

$$f'(k_t) = r_t. \tag{1.9}$$

Ici, $k_t \equiv K_{t-1}/L_t$. Cette écriture permet de mieux comprendre ce qu'implique l'hypothèse de rendements d'échelle constants : le rapport capital/travail, que l'on appelle « intensité capitalistique », est déterminé par le salaire réel (la fonction $f(k) - f'(k)k$ est croissante avec k) dans (1.8), ou par le taux d'intérêt réel dans (1.9) ; l'échelle de production est ensuite telle que le profit est nul.

On constate qu'au chapitre d'un épisode de croissance, l'intensité capitalistique augmentant, le taux d'intérêt réel baisse (le capital devient relativement abondant par rapport au travail, ce qui conduit à une baisse de sa productivité marginale), et le salaire réel augmente (la productivité marginale du travail s'élève). Cela suggère que la croissance favorise relativement plus le travail que le capital.

2.3. Les coûts d'ajustement

Jusqu'à présent, le coût d'investissement s'est limité au coût d'achat du capital. En pratique, le coût du capital peut être plus élevé, du fait de coûts supplémentaires liés à l'installation des nouveaux équipements. Pour prendre en compte ces coûts supplémentaires, écrivons le « net cash flow » en t comme égal à :

$$P_t Y_t - W_t L_t - P_t I_t \left(1 + \phi\left(\frac{I_t}{K_{t-1}}\right)\right)$$

avec $\phi(0) = 0$, $\phi'(\cdot) > 0$ et $\phi''(\cdot) > 0$. Le coût unitaire du capital est augmenté de ϕ, qui dépend du rapport I_t/K_{t-1}. On peut interpréter K_{t-1} comme une proxy de l'échelle de production courante. Doubler le capital nécessite alors d'accroître le nombre d'unités de production (usines), etc. Et il est plausible que ce coût marginal ϕ' augmente avec I_t/K_{t-1}.

Le problème de l'entreprise est dans ce cas de choisir une suite (I_t, L_t, K_t), pour tout $t \geqslant 1$, qui maximise

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{s=j}^{t} \frac{1}{1+i_j}\right) \left[P_t Y_t - W_t L_t - P_t I_t \left(1 + \phi\left(\frac{I_t}{K_{t-1}}\right)\right)\right]$$

(toujours avec la convention $i_1 = 0$) sous les contraintes

$$K_t \leqslant K_{t-1} + I_t - \delta K_{t-1}$$

pour tout $t \geqslant 1$, K_0 donné.

Notons

$$\left(\prod_{j=1}^{t} \frac{1}{1+i_j}\right) P_t q_t$$

le multiplicateur de Lagrange associé à la $t$ème contrainte. À l'optimum, ce multiplicateur est égal au supplément de recettes (totales) que permettrait de dégager une

unité de capital supplémentaire en t, tel qu'évalué du point de vue de la période initiale ($t = 1$). L'écriture de ce multiplicateur permet donc d'interpréter q_t comme le gain réel pour l'entreprise d'avoir une unité de capital en plus en début de période, cette fois évalué du point de vue de la période t. La condition du premier ordre relative à I_t donne :

$$q_t = 1 + \phi\left(\frac{I_t}{K_{t-1}}\right) + \frac{I_t}{K_{t-1}}\phi'\left(\frac{I_t}{K_{t-1}}\right).$$

Le terme q_t du membre de gauche est le « q de Tobin ». Le membre de droite est croissant avec le rapport I_t/K_{t-1}. On peut donc écrire

$$\frac{I_t}{K_{t-1}} = \psi(q_t),$$

avec $\psi' > 0$.

La pertinence des coûts d'ajustement du capital, au moins dans la formulation retenue dans cette section, est discutée. Blanchard *et al.* (1993) ont étudié la relation entre I/K et q sur XX^{e} siècle aux EU. Le rapport I/K est tiré de la Comptabilité Nationale. Il reste à choisir une mesure du q de Tobin. Notons $V(K)$ le cash flow (réel) maximal que l'on obtient avec K unité de capital. La valeur moyenne d'une unité de capital peut s'écrire $V(K)/K$. Puisque q représente la valeur (marginale) d'une unité de capital, il est naturel de choisir $V(K)/K$ (que l'on appelle parfois le « q moyen ») comme proxy de q. La figure 2, extraite de leur texte, reporte les évolutions de ces deux variables entre 1900 et 1990. Elles semblent bien évoluer de concert sur certaines périodes (1900-1920 et 1960-1975) mais en-dehors de ces périodes une hausse du q de Tobin est plutôt associée à une baisse du taux de croissance du capital agrégé, contrairement à ce que prédit la théorie. Pour cette raison, nous négligerons dorénavant les coûts d'ajustement du capital.

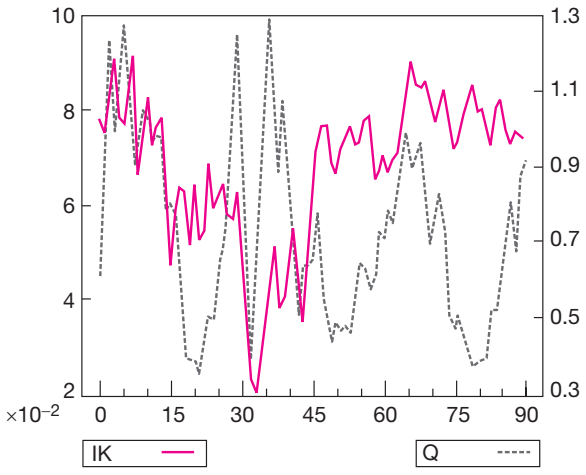


FIGURE 2
Investissement et q de Tobin

3. LA COMPTABILITÉ DE LA CROISSANCE

3.1. La décomposition de Solow

Le tableau 2 nous a amené à conclure que la croissance de la production par tête au chapitre de l'époque capitaliste était pour une grande part imputable au capital. Dans quelle mesure ? Une façon simple de répondre à cette question a été proposée par Solow (1957). Elle repose sur la description du comportement des entreprises faite dans la section précédente. Supposons que la fonction de production soit $Y_t = A_t F(K_{t-1}, L_t)$. L'homogénéité de la fonction de production nous autorise à voir $A_t K_{t-1}$ et $A_t L_t$ comme les facteurs de production effectifs lors de la période t. Ainsi, lorsque la quantité de travail fournie est L_t en t, tout se passe comme si elle était $A_t L_t$: une hausse de A_t au cours du temps reflète une hausse de l'efficacité du travail. Cette même interprétation vaut pour le capital : la qualité du capital augmentant au cours du temps, un même stock de machines permet de produire plus de biens final. Il est naturel de voir A_t comme reflétant un progrès technique, progrès incorporé également dans les équipements et dans la force de travail. Pour une telle variante de fonction de production,

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \frac{dA_t}{A_t} + A_t F'_K(K_{t-1}, L_t)\frac{K_{t-1}}{Y_t}\frac{dK_{t-1}}{K_{t-1}} + A_t F'_L(K_{t-1}, L_t)\frac{L_t}{Y_t}\frac{dL_t}{L_t}. \tag{1.10}$$

En pratique, la productivité marginale de chaque facteur de production est mesurée par son prix : sous l'hypothèse de concurrence parfaite, on a $A_t F'_K(K_{t-1}, L_t) = r_t + \delta$ et $A_t F'_L(K_{t-1}, L_t) = w_t$. Le taux de croissance de la production peut alors s'écrire :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \frac{dA_t}{A_t} + \frac{(r_t+\delta)K_{t-1}}{Y_t}\frac{dK_{t-1}}{K_{t-1}} + \frac{w_t L_t}{Y_t}\frac{dL_t}{L_t}.$$

Le rapport $(r_t+\delta)K_{t-1}/Y_t$ représente la part de la rémunération du capital dans le PIB, et $w_t L_t / Y_t$ est celle du travail.

Si l'on est capable de mesurer le revenu agrégé, le capital, le travail et les rémunérations de chacun de ces deux facteurs de production (c'est l'un des objets de la Comptabilité Nationale), le terme dA_t/A_t apparaît comme un résidu de l'équation précédente. C'est le « résidu de Solow ». Il relève de la partie non expliquée de la croissance du PIB, celle qui n'est pas imputable à la croissance des facteurs de production eux-mêmes ; c'est la « productivité globale des facteurs ».

Comme la variable L_t est en général un nombre d'heures de travail, la variable K_{t-1} pourrait représenter un nombre d'heures d'utilisation du capital, mais ce dernier est difficilement mesurable. La Comptabilité Nationale recense par contre la formation brute de capital fixe. Aussi, si l'on pouvait observer le stock de capital initial (et le taux de dépréciation du capital au cours du temps), on pourrait connaître exactement le stock de capital en t. En pratique, pour mesurer le stock de capital, on doit se résoudre à former une conjecture sur le stock de capital initial, l'influence de cette conjecture s'estompant au cours du temps du fait de la dépréciation.

L'efficacité du capital, comme celle du travail, change : le capital récent est plus efficace que l'ancien, l'éducation et l'expérience professionnelle conduisent à une

amélioration de la qualité du travail. Il existe différentes méthodes pour prendre en compte la qualité changeante des facteurs de production. L'une des plus répandues a été proposée par Jorgenson et Griliches (1967). La principale difficulté que rencontre le praticien est de distinguer deux sources de dépréciation. La première est liée à l'utilisation répétée d'un facteur de production qui s'use : c'est celle que nous avons implicitement considéré jusqu'à présent. La seconde résulte d'une obsolescence, non pas intrinsèque mais relative, des anciens équipements. Elle est causée par l'apparition de nouveaux équipements plus performants ou l'entrée dans le monde du travail d'une génération de travailleurs plus jeunes et mieux formés. Les prix courants des anciens équipements reflètent ces deux usures. Du fait de la seconde, ils donnent une vue faussée du flux de production qu'ils peuvent fournir. Ils le sous-estiment, ce qui implique en retour que la contribution des facteurs de production anciens est, elle aussi, sous-estimée : le résidu de Solow serait plus important qu'il ne l'est réellement si l'on se fiait uniquement aux prix courants des facteurs de production anciens. Jorgenson et Griliches (1967) ont proposé des règles de « repondération » des facteurs de production qui tente d'isoler la dépréciation due à l'usage du facteur. Une fois cette correction faite, on obtient le tableau 3.

	α	Taux de croissance du PIB	Contribution du capital	Contribution du travail	PGF
1947-1973	0.4	0.0542	0.0225 (42 %)	0.0021 (4 %)	0.0296 (54 %)
1960-1995	0.41	0.0358	0.018 (53 %)	0.0033 (10 %)	0.013 (38 %)

TABLEAU 3
Décomposition de la croissance en France

On retrouve la croissance forte de l'économie française durant les trente glorieuses : le produit agrégé a augmenté à un taux supérieur à 5 % durant cette période (il s'agit du taux de croissance annuel moyen sur cette période). La décomposition de Solow ne fait jouer qu'un rôle marginal au travail ; ce facteur est quasiment resté constant sur la période. Le capital explique pour moitié le taux de croissance du PIB, l'autre moitié étant imputable (par définition) à la productivité globale des facteurs. Notons que la part de la rémunération du capital α, égale à 40 %, est supérieure à celle que l'on retiendrait en utilisant les Comptes Nationaux ; c'est en partie le résultat de l'absence de prise en compte de la fiscalité. Sur la période 1960-1995, on retrouve les mêmes caractéristiques générales, mais la croissance du revenu s'est nettement ralentie, la plus grande part de ce ralentissement incombant à la productivité globale des facteurs, dont le taux de croissance a été divisé par 2.

On peut avoir une compréhension plus fine du faible rôle du travail dans la croissance du PIB en écrivant le nombre d'heures travaillées L_t comme suit :

$$L_t = P_t^{\text{tot}} \frac{P_t^{\text{emp}}}{P_t^{\text{act}}} \frac{P_t^{\text{act}}}{P_t^{\text{âge}}} \frac{P_t^{\text{âge}}}{P_t^{\text{tot}}} D_t \tag{1.11}$$

où P_t^{tot} représente la population totale, P_t^{emp} le nombre de personnes employées, P_t^{act} la population active, $P_t^{\text{âge}}$ la population en âge de travailler, et D_t la durée moyenne de travail par personne employée dans l'année t. Le rapport $P_t^{\text{emp}}/P_t^{\text{act}}$ est égal à $1-u_t$ où u_t est le taux de chômage en t. Le rapport $P_t^{\text{act}}/P_t^{\text{âge}}$ est le taux d'activité ; la population en âge de travailler est composée des personnes de 15 à 65 ans. Le taux de croissance (annuel moyen) de la population totale en France entre 1990 et 1998 est de l'ordre de 0,5 %. Scarpetta *et al.* (2000) donnent les taux de croissance des autres termes de (1.11) : $P_t^{\text{emp}}/P_t^{\text{act}}$ a baissé de 0,3 %, $P_t^{\text{act}}/P_t^{\text{âge}}$ a augmenté de 0,2 %, $P_t^{\text{âge}}/P_t^{\text{tot}}$ a baissé de 0,1 %, et D_t a baissé de 0,4 %. Grosso modo, la part de la population active dans la population totale est donc restée constante : la baisse de la part de la population active dans la population en âge de travailler, due pour l'essentiel à l'allongement de la durée des études et la baisse de l'âge de la retraite, a été compensée par l'entrée des femmes dans la population active (Salanié, 2007). La baisse du nombre d'heures travaillées, de 0,1 % durant les années 90 en France, est donc le résultat d'une hausse du taux de chômage et de la baisse de la durée moyenne du travail (par personne employée et par an), que ne suffit pas à compenser la croissance démographique[1]. Le diagnostic serait en fait assez voisin sur une période plus longue (voir Salanié, 2007, pour l'histoire depuis 1950).

Remarque 1.2 ***Fiscalité et décomposition de la croissance***

En 2006, le revenu total, égal à 1792 Md€, se décomposait en 930 Md€ au titre de la rémunération des salariés (52 % de la VA), 617 au titre de celle du capital (34 % de la VA), les 245 Md€ qui restent relevant des impôts sur la production et les importations (nets de subventions). Cette dernière catégorie recouvre pour l'essentiel la TVA (107 Md€), la Taxe Intérieure sur les Produits Pétroliers (71 Md€), la taxe professionnelle (21 Md€) et la taxe foncière (21 Md€). Elle ne recouvre bien sûr pas l'ensemble des prélèvements obligatoires : par exemple, les cotisations sociales

1. En 1998, alors que la durée légale du travail était de 39 h/sem sur $52-5=47$ semaines dans l'année, soit de 1 833 heures, la durée effective de travail était de 1599 heures seulement ; en 2003, pour une durée légale de 35 h/sem, la durée légale était de 1 645 heures par an, alors que la durée effective n'était que de 1 453 heures.
Pour avoir en tête quelques points de repères historiques, rappelons que la durée hebdomadaire de travail dans les années 1830 se situait aux alentours de 80 heures (Ducpétiaux, 1837). La loi du 22 mars 1841, première loi « relative au travail des enfants employés dans les manufactures, usines et ateliers », énonce notamment :
« ART. 1. Cette loi s'applique aux manufactures, usines, ateliers à moteur mécanique ou à feu continu, ainsi que dans les fabriques occupant plus de vingt ouvriers réunis en atelier.
ART. 2. Les enfants devront pour être admis avoir au moins huit ans. De huit à douze ans, ils ne pourront être employés au travail effectif plus de huit heures sur vingt-quatre, divisées par un repos.
De douze à seize ans, ils ne pourront être employés au travail effectif plus de douze heures sur vingt-quatre, divisées par des repos. Ce travail ne pourra avoir lieu que de 5 heures du matin à 9 heures du soir.
ART. 3. Les enfants en dessous de seize ans ne pourront être employés les dimanches et jours de fête reconnus par la loi. »
La durée annuelle légale de travail a baissé en raison de la baisse conjointe de la durée légale hebdomadaire et celle du nombre de semaines travaillées dans l'année. La loi « Millerand » du 30 mars 1900 fixe l'organisation progressive en quatre ans de la journée de travail de tous à 10 heures. La loi du 23 avril 1919 institue des durées maximales de 8 h par jour et de 48 h par semaine. Sous le Front populaire, la durée hebdomadaire (légale) passe à 40 h (mais elle s'élève dès la fin de la guerre, et la hausse se poursuit jusqu'au milieu des années 60). Le passage à 39 h se fait en février 82, et à 35 h en 2000-2002. Dans le même temps, les deux premières semaines de congés payés sont créées en 1936, la 3$^{\text{e}}$ en 1956, la 4$^{\text{e}}$ en 1969, et la 5$^{\text{e}}$ en 1982.

(331 Md€) sont incluses dans la rémunération des salariés, tandis que l'impôt sur les sociétés (49 Md€) l'est dans les revenus du capital. Il est sans doute inutile de considérer ici chacun de ces prélèvements. Contentons-nous du plus important en termes de recettes : la TVA. En première approximation, on peut considérer que la TVA est un impôt qui porte sur la valeur ajoutée nette du coût du capital. Soit τ le taux (moyen) de TVA : la TVA (réelle) que doit acquitter l'entreprise est donc égale à $\tau(Y_t - r_t K_{t-1})$, et son profit s'écrit $Y_t - w_t L_t - r_t K_{t-1} - \tau(Y_t - r_t K_{t-1}) = (1-\tau)Y_t - w_t L_t - (1-\tau) r_t K_{t-1}$. La maximisation du profit donne ainsi :

$$A_t \frac{\partial F(K_{t-1}, L_t)}{\partial K_{t-1}} = r_t$$

et

$$A_t \frac{\partial F(K_{t-1}, L_t)}{\partial L_t} = \frac{w_t}{1-\tau}$$

ce qui montre que la TVA pèse en fait implicitement sur le travail. La décomposition (1.10) se réécrit

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \frac{dA_t}{A_t} + \frac{r_t K_{t-1}}{Y_t}\frac{dK_{t-1}}{K_{t-1}} + \frac{w_t}{1-\tau}\frac{L_t}{Y_t}\frac{dL_t}{L_t}.$$

En négligeant la TVA, on sous-estime donc le poids de la croissance des heures travaillées ; un coefficient α de 0.4 tend à sur-estimer le poids réel du capital, qui devrait être de l'ordre de 0,3.

Remarque 1.3 ***Le rapport Stiglitz***

La production agrégée est un agrégat de nombreux biens différents. Cette agrégation suppose de retenir une unité commune. Traditionnellement, les biens ont été agrégés en valeur : c'est le prix de ces biens que l'on somme. Le rapport Stiglitz (septembre 2009) a critiqué cette procédure en insistant sur le fait que le prix de marché peut ne pas correctement refléter la valeur sociale des biens (comme c'est le cas en présence d'externalités), lorsqu'un bien n'a pas de prix parce qu'il n'est pas fourni par le marché (on pense par exemple aux cas de l'éducation ou de la santé, dont les contributions au PIB sont mesurées conventionnellement par les salaires des professeurs ou des médecins), mais aussi lorsque les prix sont l'objet d'une bulle spéculative, c'est-à-dire qu'ils ne reflètent pas uniquement la valeur « fondamentale » des biens. Le calcul du PIB se prête également mal aux changements qualitatifs des biens, et « sous-estimer les améliorations qualitatives revient à sur-estimer le taux d'inflation, donc à sous-estimer le revenu réel ».

Le rapport recommande (1) de prendre en compte des considérations de répartition (une hausse du PIB peut être inégalement répartie) et, de ce point de vue, de plus mettre l'accent sur les ménages, (2) de passer de la production au revenu, à la consommation et à la richesse (le revenu net des ménages peut évoluer plus lentement que le revenu agrégé, par exemple sous l'effet de la fiscalité) et (3) plus généralement essayer de mesurer le « bonheur » (qui dépend certes des conditions de vie matérielles, mais aussi de la santé, de l'éducation, des rapports sociaux ou de l'environnement). Concernant ce dernier point, ceux qui se réfèrent au seul PIB avancent que son évolution est étroitement liée à celle des autres grandeurs.

Enfin, le rapport recommande d'essayer d'apprécier la soutenabilité de la croissance : la croissance acuelle se fait-elle au détriment du bien-être des générations futures ? Une amélioration financière qui cache le risque associée à une transaction peut favoriser l'échange aujourd'hui mais se révél[er] dommageable plus tard.

3.2. Les TIC

Mairesse et Kocoglu (2002, 2004) reportent le taux de croissance annuel moyen (en %) de la productivité apparente du travail, mesurée par (1) − (2) dans le tableau 3. Il a été divisé par 2 entre 1980-1990 et 1990-2002. La ligne (2) montre que ce mouvement a dans un premier temps été freiné par la baisse de l'emploi, mais qu'il est renforcé depuis 1995 par la hausse de l'emploi liée aux différentes politiques d'« d'enrichissement du contenu en emplois de la croissance », en revalorisant l'emploi non qualifié. Certains se sont étonnés de l'ampleur du ralentissement durant la période d'émergence de la « nouvelle économie » qui s'appuie massivement sur les Technologies d'Information et de Communication (TIC), c'est-à-dire sur les matériels informatiques, les logiciels et les matériels de communication. La prise en compte des TIC dans la Comptabilité Nationale pose des problèmes spécifiques qu'il est difficile de résoudre de façon entièrement convaincante ; par exemple, une incertitude quant à la nature des TIC pèse sur le partage entre investissement (qui rentre dans la valeur ajoutée) et biens intermédiaires (qui ne sont pas comptabilisés dans la valeur ajoutée). Ces mises en garde à l'esprit, le tableau 4 présente une décomposition qui isole l'effet des TIC.

	1980-2002	1980-90	1990-95	1995-2002
(1) Valeur ajoutée	1.94	2.43	0.41	2.3
(2) Emploi	0.07	−0.26	−1.13	1.42
(3) TIC		0.15	0.15	0.37
Coût d'usage TIC		*0.32*	*0.33*	*0.36*
Élasticité PIB/TIC		*0.017*	*0.023*	*0.024*
Croissance TIC		*8.7*	*6.3*	*15.2*
(4) Autres équipements	0.52	0.62	0.69	0.25
(5) Bâtiments et infrastructures	0.41	0.54	0.8	−0.05
(6) Durée de travail	−0.4	−0.4	−0.14	−0.59
(7) PGF	1.07	1.69	0.01	0.9
PGF TIC		*0.4*	*0.1*	*0.6*

TABLEAU 4
Productivité du travail et TIC en France

Distinguons trois facteurs de production : le capital hors TIC, le capital TIC T_t et L_t le travail. On obtient :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \frac{dA_t}{A_t} + \frac{A_t F_K K_{t-1}}{Y_t}\frac{dK_{t-1}}{K_{t-1}} + \frac{A_t F_T T_t}{Y_t}\frac{dT_t}{T_t} + \frac{A_t F_L L_t}{Y_t}\frac{dL_t}{L_t}.$$

Les conditions du premier ordre du problème de maximisation du profit intertemporel s'écrivent quant à elles :

$$p_t A_t F_K = (1+i)p_{Kt-1} - (1-\delta)p_{Kt},$$
$$p_t A_t F_T = (1+i)p_{Tt-1} - (1-\delta)p_{Tt},$$

et

$$p_t A_t F_L = w_t.$$

Ainsi, le taux de croissance du PIB devient, pour un taux d'intérêt nominal, des taux de dépréciation et des variations de prix des différents types de capital suffisamment proches de 0,

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \frac{dA_t}{A_t} + (i+\delta_K - \pi_{Tt})\frac{p_{Kt}K_{t-1}}{p_t Y_t}\frac{dK_{t-1}}{K_{t-1}} + (i+\delta_T - \pi_{Tt})\frac{p_{Tt}T_t}{p_t Y_t}\frac{dT_t}{T_t} + \frac{w_t L_t}{p_t Y_t}\frac{dL_t}{L_t}.$$

Comme $L_t = N_t D_t$, si l'on suppose que les rendements d'échelle constants,

$$\frac{dY_t}{Y_t} - \frac{dN_t}{N_t} = \frac{dA_t}{A_t} + (i+\delta_K - \pi_{Kt})\frac{p_{Kt}K_{t-1}}{p_t Y_t}\left(\frac{dK_{t-1}}{K_{t-1}} - \frac{dN_t}{N_t}\right) + (i+\delta_T - \pi_{Tt})\frac{p_{Tt}T_t}{p_t Y_t}\left(\frac{dT_t}{T_t} - \frac{dN_t}{N_t}\right) + \frac{w_t L_t}{p_t Y_t}\frac{dD_t}{D_t}.$$

Les TIC sont caractérisées par une obsolescence et une baisse de prix rapides ; le « coût d'usage » des TIC $(i+\delta_T - \pi_{Tt})$ est de l'ordre de 30 à 35 % dans le tableau 4. À titre de comparaison, il n'est que d'environ 10 % pour un bien d'équipement usuel.

Bien que la part des TIC dans le PIB, mesurée par $p_{Tt}T_t/p_t Y_t$ soit relativement faible, de l'ordre de 6 % en France (pour le capital hors TIC, elle est de l'ordre de 20 à 30 %), la contribution du capital TIC à la hausse de la productivité du travail ne peut pas être négligée : 1 point de pourcentage de croissance du capital TIC a conduit à une hausse de $0,024$ $(\simeq 0,35 \times 0,06)$ point de croissance de la productivité du travail entre 1995 et 2002. Au final, le tableau 4 montre que la contribution du capital TIC est devenue supérieure à celle du capital hors TIC depuis 1995.

Pourquoi la productivité du travail baisse-t-elle ? On le voit : l'augmentation de la contribution du capital TIC et de la PGF TIC ne sont pas suffisantes pour compenser la baisse de la contribution du capital hors TIC, de la PGF hors TIC, et de la durée du travail.

4. CONCLUSION

Prendre en compte le capital dans l'analyse implique un nouveau lien entre l'offre et la demande : un lien temporel. Nous n'avons dans ce chapitre appréhendé le capital que sous l'angle de l'offre agrégée. La macroéconomie de court terme n'envisage quant à elle l'investissement que sous l'angle de la demande agrégée, comme une composante de la demande, celle des entreprises, à côté de celle des ménages, de l'État ou de l'extérieur.

L'objectif général du chapitre suivant est de représenter cette interaction propre au capital, influençant la demande au moment où les entreprises investissent, et l'offre quand elles bénéficient d'un équipement nouveau qui accroît leur capacité de production. La prise en compte du capital passe dans un premier temps par une adaptation du concept d'équilibre statique (ou bien, pour reprendre une terminologie due à Hicks, « temporel ») à un cadre où le temps compte : ce nouveau concept est celui de l'équilibre « intertemporel ». Le chapitre suivant présente les tentatives d'adaptation faites par les auteurs d'inspiration keynésienne dans les années 1940. Elles vont jeter les bases du cadre des modèles de croissance utilisés aujourd'hui.

CHAPITRE 2

L'équilibre intertemporel

1. INTRODUCTION

Ce sont les premiers modèles de croissance keynésiens, apparus dans les années 1940, qui vont introduire le concept d'équilibre intertemporel. Ces travaux s'appuient sur l'équilibre de court terme du modèle IS-LM et voient en conséquence l'investissement comme une composante de la demande agrégée de biens et services. Alors que le modèle IS-LM ne prend pas en compte la contrepartie de l'investissement en termes du stock de capital supplémentaire, Domar (1946) est le premier à avoir cherché à intégrer ce double rôle joué par le capital, à la fois dans l'offre et dans la demande de biens. C'est lui qui est à l'origine de la notion de « taux de croissance garanti », celui qui correspond au taux de croissance du bien final résultant d'une accumulation du capital sans contrainte sur l'offre de travail.

Harrod (1939) se pose la question de la stabilité de la croissance : est-il possible que l'offre soit égale à la demande lors de chaque période lorsque certaines décisions (ici, l'investissement) influencent les deux côtés du marché de façon *a priori* différentes ? Ces deux analyses adoptent un point de vue keynésien, au sens où l'évolution de la production est déterminée par la demande agrégée indépendamment de la quantité de travail offerte ; les prix des biens et des facteurs de production restent constants. On supposera que la quantité de travail effectivement utilisée est celle qui est juste nécessaire à la satisfaction de la demande de biens finals, que cette demande est trop faible, et qu'il en résulte du chômage.

La vision keynésienne du long terme confirme les enseignements keynésiens de court terme : l'excès de demande généralisé qui caractérise l'économie dans le cadre du modèle IS-LM de court terme, et plus généralement les déséquilibres observés sur les marchés devraient se retrouver à plus long terme. L'équilibre intertemporel est aussi peu plausible à long terme que l'équilibre général walrassien à court terme.

Cette vision cadre parfois mal avec les faits stylisés. Ce chapitre décrit comment le cadre keynésien a été amendé pour le réconcilier avec une évolution moins heurtée dans le plus long terme : on insiste souvent sur les aspects technologiques, moins sur les hypothèses fortes faites sur les comportements de formation des anticipations retenus par les auteurs qui suivront les keynésiens, et dont l'influence perdurera jusqu'à aujourd'hui.

2. LA CROISSANCE EN DÉSÉQUILIBRE

On supposera que la fonction de production est de type Leontief :

$$F(K_{t-1}, L_t) = \inf\left(\frac{K_{t-1}}{v}, \frac{L_t}{u}\right),$$

où le coefficient de capital v représente le nombre d'unités de capital nécessaires pour produire une unité de bien final. Les facteurs de production ne sont donc pas substituables ; on supposera que le capital est le facteur crucial dans la production, au sens où $K_{t-1}/v < L_t/u$ pour tout t. On a donc $Y_t = K_{t-1}/v$ pour tout t.

2.1. Le modèle de Domar

L'investissement influence la demande agrégée, mais aussi l'offre agrégée, par le biais du capital supplémentaire qui est introduit dans le processus de production. Un équilibre est une situation dans laquelle la capacité de production est égale à la demande de biens. Étant donnée la nature double de l'investissement, il est naturel de se demander si un tel équilibre peut être obtenu à chaque période. Il faut pour cela que la capacité de production, que nous appellerons « offre » pour simplifier, soit égale à la demande lors d'une période donnée, et que ces deux grandeurs croissent ensuite au même taux.

Étape 1. Plaçons-nous à la date 1, au début de la période $t = 1$. Il existe alors un stock de capital K_0 donné comme condition initiale. La capacité de production, K_0/v, est donc elle aussi donnée. Soit Y_1^d la demande lors de cette période. Elle est égale à $C_1 + I_1$. Supposons qu'une part constante c $(0 < c < 1)$ du revenu est consommée, $C_1 = cY_1$. Alors, $Y_1^d = cY_1 + I_1$. Dans une configuration keynésienne, le revenu est égal à la demande agrégée : $Y_1^d = Y_1 = I_1/(1-c) = I_1/s$. On retrouve l'effet multiplicateur : une hausse exogène de l'investissement conduit à une hausse de la demande, et donc à une hausse de la consommation, qui conduit à une nouvelle hausse de la demande ; ce processus s'amortit du fait de la loi psychologique fondamentale keynésienne $(0 < c < 1)$.

Pour $I_1 = K_1 - K_0$ (on néglige la dépréciation), à l'équilibre, en $t = 1$, on a :

$$\frac{K_0}{v} = \frac{I_1}{s} \Leftrightarrow \frac{K_1 - K_0}{K_0} = \frac{s}{v}. \tag{2.1}$$

Cette condition fait intervenir le taux de croissance du capital entre 0 et 1. Ce taux doit être égal au rapport s/v, que l'on appelle le taux de croissance garanti.

Étape 2. La variation de l'offre entre la période 2 et la période 1 est égale à $(K_1 - K_0)/v = I_1/v$: on retrouve un « effet accélérateur » selon lequel l'investissement influence la variation de la production (et non pas son niveau). La variation de la demande est de son côté égale à $(I_2 - I_1)/s$. Si l'égalité emplois-ressources était assurée en $t = 1$, elle l'est en $t = 2$ si et seulement si

$$\frac{I_1}{v} = \frac{I_2}{s} - \frac{I_1}{s} \Leftrightarrow \frac{I_2 - I_1}{I_1} = \frac{s}{v},$$

et plus généralement, pour $t \geqslant 1$,

$$\frac{I_{t+1} - I_t}{I_t} \equiv \frac{\Delta I_{t+1}}{I_t} = \frac{s}{v}. \tag{2.2}$$

L'investissement doit donc croître au taux de croissance garanti s/v.

Un équilibre intertemporel est donc tel que (2.1) et (2.2) sont vraies pour tout $t \geqslant 0$. L'intuition du mécanisme économique à l'œuvre dans (2.2) est immédiate : si la quantité investie I_t a permis, lors d'une période t, de rendre la demande agrégée égale à l'offre agrégée (qui était alors donnée), elle a en même temps accru la capacité de production dont l'économie disposera lors de la période suivante (de I_t/v). Il faudra donc que l'investissement augmente plus lors de la période suivante que lors de la période courante, pour que le niveau de la demande future puisse atteindre celui de l'offre future. En fait, il faut que la demande agrégée augmente de I_t/v, c'est-à-dire que l'investissement augmente d'un montant ΔI_{t+1} tel que $\Delta I_{t+1}/s$ (l'augmentation de la demande entre t et $t+1$) égale I_t/v (l'augmentation de l'offre entre t et $t+1$). Alors, la demande agrégée croît au taux s/v, la production croît donc aussi à ce taux, de même que le stock de capital agrégé.

2.2. Le principe du modèle de Harrod

Domar (1946) nous a laissé une condition de croissance équilibrée. Harrod (1948) cherche à évaluer la plausibilité d'un tel régime. Il part du constat que les entreprises investissent en t sur la base de la demande agrégée qu'elles anticipent pour $t+1$. La question qu'il pose est alors la suivante : est-il possible que les entreprises, si elles n'anticipent pas initialement une variation de la production assurant l'égalité entre l'offre et la demande lors de la période courante, finissent néanmoins par converger vers cette situation ?

Pour le savoir, partons de l'hypothèse que l'offre (K_{t-1}/v) est égale à la demande en t.

Quelle est la demande agrégée lors de la période t ? Pour le savoir, supposons que les investisseurs anticipent en t que la demande de biens va s'élever au taux g^e_{t+1} entre t et $t+1$; soit $Y^e_{t+1} = (1 + g^e_{t+1})Y_t$. En t, le capital est pleinement utilisé : $Y^s_t = Y^d_t = K_{t-1}/v$. Pour satisfaire la demande supplémentaire, les investisseurs doivent augmenter leur stock de capital au taux g^e_{t+1} : on a donc $K_t = (1 + g^e_{t+1})K_{t-1}$. L'investissement correspondant est $I_t = (1 + g^e_{t+1})K_{t-1} - K_{t-1} = g^e_{t+1}K_{t-1}$.

Ce niveau d'investissement détermine la demande de biens en t : la demande en t doit donc être égale à $g^e_{t+1} K_{t-1}/s$. Pour que l'hypothèse initiale soit satisfaite, on doit avoir, pour tout K_{t-1} :

$$\frac{K_{t-1}}{v} = g^e_{t+1} \frac{K_{t-1}}{s} \Leftrightarrow g^e_{t+1} = \frac{s}{v}.$$

En d'autres termes, si les investisseurs pensent que l'économie va croître au taux garanti s/v, l'économie croît effectivement au taux garanti, et l'offre est égale à la demande lors de chaque période.

Mais c'est parce que les investisseurs anticipent que l'économie va croître au taux garanti entre aujourd'hui et demain, que l'offre est égale à la demande aujourd'hui. Comme ceci est vrai à chaque période (en fait, plus exactement, indépendamment du stock de capital courant, prédéterminé), l'économie est équilibrée à chaque date et croît au taux garanti.

Si le stock de capital augmente à un taux supérieur au taux garanti (parce que les investisseurs optimistes anticipent un taux de croissance de l'activité supérieur au taux garanti), alors il en résulte un excès de demande de biens qui devrait conduire les investisseurs à accroître encore leur investissement, aggravant l'excès de demande initial.

Réciproquement, si le stock de capital augmente à un taux inférieur au taux garanti, alors il en résulte un excès d'offre de biens qui devrait conduire les investisseurs à réduire encore leurs investissement, aggravant l'excès d'offre initial. C'est le « fil du rasoir ».

Peut-on obtenir une croissance *équilibrée* de plein-emploi ? l'égalité emploi-ressources et la pleine utilisation du capital sont assurées si le taux de croissance de l'économie est égal au taux garanti. Il y a plein-emploi si le taux de croissance démographique n est égal au taux de croissance de l'économie. Jusqu'à présent, on a implicitement supposé que $n \geqslant s/v$ (pas de contrainte quant à l'offre de travail). Clairement, si $n < s/v$, alors l'économie croît au taux n, et comme $n < s/v$, il y a gaspillage de capital de plus en plus important (excès d'offre de biens). Si $n > s/v$, croissance équilibrée avec chômage. *a priori*, il n'y a pas de relation entre s, v et n : tous les régimes sont donc possibles.

3. LA CROISSANCE NÉOCLASSIQUE

Les analyses keynésiennes de la croissance suggèrent que la dynamique de l'économie devrait être caractérisée par une très forte instabilité ; dans ces analyses, il n'existe pas de forces de rappel dès lors que le système ne croît pas au taux de croissance garanti. Leurs prédictions ont été perçues comme plus éloignées des faits stylisés de la croissance dans le long terme tels qu'ils ont été rassemblés par Nicholas Kaldor (1963) :

1. Le produit par tête croît au cours du temps, et son taux de croissance ne tend pas à diminuer.
2. Le capital (physique) par tête croît au cours du temps.

3. Le taux de rendement du capital est approximativement constant.
4. Le rapport du capital physique et du produit agrégé est approximativement constant.
5. Les parts de rémunération du travail et du capital dans le revenu national sont approximativement constantes.
6. Les taux de croissance du produit par tête diffèrent selon les pays.

C'est en partie ce hiatus qui a motivé Solow (1956) : « An expedition from Mars arriving on Earth having read this literature would have expected to find only the wreckage of a capitalism that had shaken itself to pieces long ago. Economic history was indeed a record of fluctuations as well as of growth, but most business cycles seemed to be self-limiting. Sustained, though disturbed, growth was not a rarity » dit-il en recevant le prix Nobel en 1987.

Solow va réconcilier la théorie avec une vision plus stable de l'économie dans le long terme en relachant l'hypothèse, plus plausible à très court terme qu'à plus long terme, selon laquelle le coefficient de capital est constant. Il va considérer une fonction de production agrégée à rendements décroissants : le rendement du capital, bien que positif, est plus faible au fur et à mesure que le stock de capital agrégé s'élève par rapport à la quantité de main-d'œuvre disponible ; de façon équivalente, le coefficient de capital augmente. Le cadre est sinon analogue à celui de Harrod-Domar.

3.1. Le cadre

Du côté de l'offre, les entreprises sont supposées produire un bien, qui sert à la fois de bien de consommation et de capital, à partir de deux facteurs, le travail et le capital. Ces deux facteurs sont possédés par les ménages ; chaque ménage offre une unité de travail lors de chaque période. Il y a N_t ménages à la date t (et la population croît au taux constant n). Les ménages disposent donc du revenu des facteurs de production, et ils choisissent à chaque date la quantité qu'ils souhaitent consommer et celle qu'ils souhaitent utiliser pour augmenter leur stock de capital.

3.1.1. La fonction de production

La fonction de production laisse ouverte la possibilité de substituer du capital à du travail. Soit

$$Y_t = F(K_{t-1}, L_t) \tag{2.3}$$

la production en t. Nous supposerons que la fonction de production est néo-classique, et que $F(0,L) = F(K,0) = 0$. En outre, les conditions d'Inada sont satisfaites :

$$\lim_{K\to 0} F'_K(K,L) = \lim_{L\to 0} F'_L(K,L) = +\infty$$

et

$$\lim_{K\to \infty} F'_K(K,L) = \lim_{L\to \infty} F'_L(K,L) = 0.$$

3.1.2. La chronologie

Il est nécessaire de décrire très précisément la suite des évènements qui se succèdent lors de la période t. Dans ce qui suit, on choisit le bien final comme numéraire (son prix est donc égal à 1).

À la date t, qui marque le début de la période t, les ménages possèdent un stock de capital K_{t-1} qui est prédéterminé à cet instant, c'est-à-dire déterminé avant la date t, résultant d'une accumulation antérieure à cette date ; nous allons voir tout à l'heure comment. Ils possèdent aussi une quantité de travail N_t.

S'ouvrent alors les marchés pour les facteurs de production. Les ménages offrent les K_{t-1} unités de capital qu'ils possèdent, et N_t unités de travail. Les entreprises « louent » les services de ces K_{t-1} unités de capital au prix r_t (elles utilisent K_{t-1} unités de capital et rendent $(1+r_t)K_{t-1}$ unités de capital). Elles demandent L_t unités de travail ; le salaire réel est fixé de sorte que $L_t = N_t$.

Les entreprises produisent à l'aide de ces K_{t-1} unités de capital et L_t unités de travail $Y_t = F(K_{t-1}, L_t)$ biens finals. Il y a donc, à l'issue de la production, K_{t-1} unités de capital (si l'on néglige la dépréciation) et Y_t biens dont la forme définitive (bien de consommation ou capital) n'a pas encore été décidée. Le stock K_{t-1} est ici le « patrimoine » du ménage tandis que Y_t est son (flux de) revenu.

Les entreprises distribuent le revenu $r_t K_{t-1} + w_t L_t = Y_t$ aux ménages en contrepartie des facteurs qu'elles utilisent. Les ménages disposent de ce revenu pour consommer une quantité de biens C_t et épargner le reste, S_t.

Le marché pour le bien final (produit en t) est ouvert à cet instant ; le bien est demandé par les ménages (il peut être consommé ou servir à l'accumulation du capital) et il est offert par les entreprises, en quantité Y_t.

Une fois la consommation C_t choisie, il reste $K_{t-1} + (Y_t - C_t)$ biens qui formeront le stock de capital K_t des ménages à la date suivante, $t+1$. La période t s'achève.

Au total :

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & Y_t & \rightarrow & C_t & & \\ K_{t-1} & & & \searrow & & & \\ & \searrow & K_{t-1} & + & S_t & \rightarrow & K_t \end{array}$$

Ou bien encore, en termes de revenus,

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & Y_t = F(K_{t-1}, L_t) = r_t K_{t-1} + w_t L_t & \rightarrow & C_t & & \\ K_{t-1} & & & & \searrow & & \\ & \searrow & K_{t-1} & & + & S_t \rightarrow & K_t \end{array}$$

3.2. Les comportements

L'entreprise se comporte de façon concurrentielle (elle prend les prix des facteurs comme donnés). Tout se passe comme si elle choisissait donc (K_{t-1}, L_t) qui maximise son profit courant $Y_t - r_t K_{t-1} - W_t L_t$. Les conditions du premier ordre sont :

$$F'_K(K_{t-1}, L_t) = r_t, \tag{2.4}$$

et

$$F'_{AL}(K_{t-1}, L_t) = w_t. \tag{2.5}$$

Ses profits sont nuls puisque la fonction F est homogène de degré 1 :

$$Y_t = r_t K_{t-1} + w_t L_t. \tag{2.6}$$

Rappelons que toutes les grandeurs sont réelles : il n'y a pas de monnaie.

Du côté du comportement des ménages est faite une hypothèse simplificatrice importante du modèle de Solow : l'épargne est proportionnelle au (flux de) revenu des ménages, et cette proportion est fixe. Le revenu des ménages provient du capital et du travail. Il est égal $r_t K_{t-1} + w_t L_t$ et donc au revenu agrégé Y_t. En notant s la part du revenu qui est épargnée, on a :

$$S_t = sY_t = s(r_t K_{t-1} + w_t L_t). \tag{2.7}$$

La consommation des ménages est égale au revenu des ménages diminué de leur épargne, soit :

$$C_t = Y_t - S_t. \tag{2.8}$$

On constate que les représentations des comportements des entreprises et des ménages sont très différentes l'une de l'autre : les entreprises sont supposées choisir le rythme d'accumulation du capital et embaucher le nombre de travailleurs qui maximisent leur profit, alors que les ménages se comportent d'une façon très rudimentaire, consommant une proportion fixe de leur revenu et épargnant le reste. On reconnaît le comportement de consommation keynésien : en moyenne, les ménages consomment effectivement environ 80 % de leur revenu. Cependant, il n'y a pas de raison pour que cette règle de partage du revenu entre la consommation et l'épargne soit la meilleure pour les ménages. Au contraire, il est plausible que l'effort d'épargne soit moins important lorsque le revenu est plus bas, soit parce que l'économie amorce son développement, soit parce qu'elle est perturbée par un choc, une tempête qui détruit une grande partie de la production.

L'un des objets des chapitre qui vont suivre sera de traiter les deux types d'agents de la même manière : les ménages devraient choisir leur consommation, leur épargne et leur offre de travail en fonction des prix auxquels ils sont confrontés ; un taux d'intérêt élevé pourrait inciter les ménages à un effort d'épargne supplémentaire. Pour l'instant, nous nous contenterons de cette modélisation, et nous supposerons également que l'offre de travail est inélastique (ce qui n'est pas déraisonnable).

3.3. L'équilibre

3.3.1. L'équilibre intertemporel

Rappelons que le stock de capital K_0 est donné lors de la période initiale, $t = 1$. Un équilibre de la période $t \geqslant 1$ est une situation dans laquelle les entreprises et les ménages se comportent comme décrit ci-dessus, c'est-à-dire (2.3) à (2.8) sont satisfaites, et les marchés sont équilibrés.

Il y a trois marchés ouverts lors de chaque période : un marché du travail, un marché du capital et un marché pour le bien.

L'égalité emplois-ressources sur le marché du travail s'écrit :

$$L_t = N_t. \tag{2.9}$$

Sur le marché du capital, les ménages possèdent au début de la période t une quantité de capital héritée du passé, composée de K_{t-2} unités de capital et augmentée de l'épargne S_{t-1} réalisée lors de la période précédente ; les entreprises demandent quant à elles K_{t-1} unités de capital (en t). Et l'on doit avoir :

$$K_t = K_{t-1} + S_t. \tag{2.10}$$

Sur le marché du bien, la production $F(K_{t-1}, L_t)$ doit être égale à la demande des ménages, $C_t + S_t$:

$$F(K_{t-1}, L_t) = C_t + S_t. \tag{2.11}$$

Un équilibre de la période t est une situation dans laquelle les équations (2.3) à (2.11) sont satisfaites, étant donné le stock de capital $K_{t-2} + S_{t-1} = K_{t-1}$ possédé en début de période par les ménages. Notons que (2.6) est redondante avec (2.3), (2.4) et 2.5). De plus, il est facile de vérifier que (2.3), (2.8) et (2.10) impliquent (2.11) ; il s'agit bien sûr d'une conséquence de la loi de Walras.

Les 7 variables endogènes $(Y_t, L_t, K_t, w_t, r_t, C_t, S_t)$ sont déterminées lors de la période t par les équations (2.3) à (2.11), deux d'entre elles étant redondantes.

Nous nous intéresserons dans ce qui suit aux équilibres intertemporels. Un équilibre intertemporel est une situation dans laquelle on a un équilibre pour tout t, étant donné le stock de capital initial. En utilisant (2.7) et (2.9), l'équation (2.10) permet de définir un tel équilibre comme une suite $(K_t, t \geqslant 1)$ associée à la condition initiale K_0 telle que :

$$sY_t = K_t - K_{t-1}, \tag{2.12}$$

où $Y_t = F(K_{t-1}, L_t)$ représente le revenu agrégé des ménages. Les autres variables endogènes sont déterminées par les équations adéquates du système précédent.

3.3.2. L'équilibre stationnaire

Un équilibre stationnaire est un équilibre intertemporel dans lequel toutes les quantités agrégées croissent au même taux, indépendamment de t. Comme l'offre de travail croît au taux n, toutes les autres variables doivent croître à ce même taux. Pour caractériser un tel équilibre, il est donc plus simple de considérer les variables par tête, qui sont constantes à l'équilibre stationnaire. Notons $y_t = Y_t/L_t$ le produit par tête, $k_t = K_{t-1}/L_t$ le stock de capital par tête en t, et $f(k) = F(k, 1)$. Alors, $y_t = f(k_t)$. On a

$$r_t = F_K(K_{t-1}, L_t) = F_K(K_{t-1}/L_t, 1) = f'(k_t),$$

et comme

$$Y_t = F_K(K_{t-1}, L_t)K_t + F_L(K_{t-1}, L_t)L_t,$$

on a :

$$w_t = f(k_t) - r_t k_t.$$

Le partage de la valeur ajoutée entre les revenus du travail et ceux du capital est représenté sur la figure 1. Le revenu (par tête efficace) est $y_t = f(k_t)$; il est égal à la somme des revenus $r_t k_t + w_t$ des facteurs, avec $r_t = f'(k_t)$.

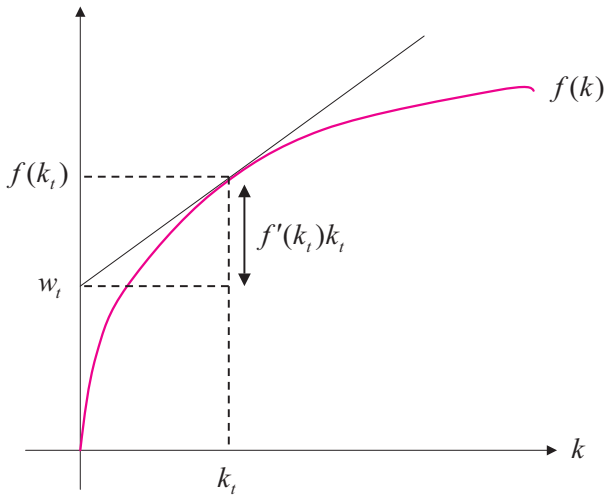


FIGURE 1
Le partage de la valeur ajoutée

La fonction f est concave : une hausse du stock de capital par tête (efficace) implique une hausse de la production par tête (efficace) mais cette hausse est de moins en moins importante au fur et à mesure que le stock de capital par tête s'élève. Nous avons déjà décrit dans ce cadre comment devrait évoluer le partage de la valeur ajoutée au cours du temps. Le taux d'intérêt réel (la productivité marginal du capital par tête (efficace)) baisse au fur et à mesure que le capital par tête augmente. La répartition des revenus entre le capital et le travail est déformée en faveur du travail.

Les deux définitions suivantes procèdent de (2.12).

Définition 2.1

Un équilibre intertemporel est une suite $(k_t, t \geqslant 1)$ *associée à* $k_1 = K_0/N_1$ *donné, et telle que :*

$$sf(k_t) = (1+n)k_{t+1} - k_t. \tag{2.13}$$

L'équation (2.13) est l'équation fondamentale du modèle de Solow.

Définition 2.2

Un équilibre stationnaire est un stock de capital par tête k^* *tel que :*

$$sf(k^*) = nk^*. \tag{2.14}$$

Un équilibre stationnaire est donc un équilibre intertemporel associé à la condition initiale $k_0 = k^*$.

3.4. La dynamique de l'économie

La figure 2 décrit la dynamique du stock de capital par tête telle qu'elle suit de (2.13). Elle fait clairement apparaître qu'il existe un stock de capital par tête constant (strictement) positif k^* solution de (2.13), et qu'il est globalement stable : pour un stock de capital initial $k_0 < k^*$, on a k_1 tel que $(1+n)k_1 = sf(k_0) + k_0$ qui est plus grand que k_0 ; à l'inverse, pour un stock de capital par tête k'_0 plus élevé que k^*, le capital par tête décroît au cours du temps.

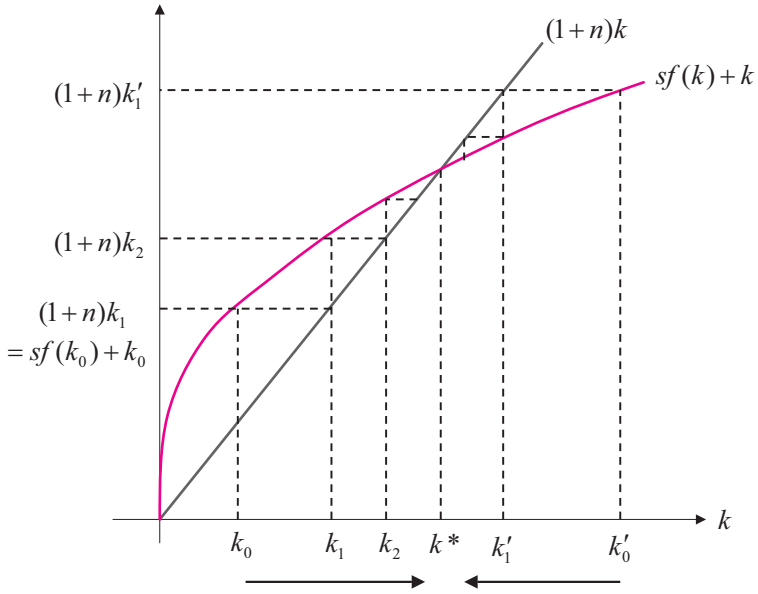


FIGURE 2
La dynamique du modèle de Solow

Il est facile de comprendre pourquoi se fait la convergence du stock de capital par tête vers sa valeur stationnaire. Supposons que le stock de capital par tête $k_t = K_{t-1}/L_t$ soit faible. Alors, la productivité marginale du capital par tête $f'(k_t)$, qui est égale à $F_K(K_{t-1}/L_t, 1)$, et donc à $F_K(K_{t-1}, L_t)$ puisque l'hypothèse de rendements d'échelle constants implique que F_K est homogène de degré 0, est très élevée du fait de la loi des rendements (marginaux) décroissants pour chacun des facteurs de production. La productivité moyenne du capital $Y_t/K_{t-1} = F_K + F_L/k_t$ est donc très élevée. Or, le taux de croissance du stock de capital agrégé est sY_t/K_{t-1} : il est donc lui aussi très élevé, plus élevé que le taux de croissance de la population. Le stock de capital par tête augmente.

Mais, puisque les rendements d'échelle sont constants, le taux de croissance de la production agrégée est une moyenne pondérée du taux de croissance de chaque

facteur de production. On doit avoir :

$$n < \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} < \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}},$$

ce qui implique une baisse de la productivité moyenne Y_t/K_{t-1} du capital, et donc une baisse du taux de croissance du stock de capital agrégé.

Au total, au fur et à mesure que le stock de capital agrégé devient moins rare par rapport au travail, sa productivité marginale baisse, du fait de la loi des rendements décroissants, ce qui freine la croissance.

Vérifions ces propriétés analytiquement. En un équilibre stationnaire,

$$sf(k^*) = (1+n)k^* - k^* = nk^*.$$

Notons que $k^* = 0$ est solution : en l'absence de capital, la production est nulle, le revenu distribué est nul, l'épargne est nulle, l'investissement est donc nul, de sorte que le stock de capital reste nul. Dans ce qui suit, nous réserverons l'expression « équilibre stationnaire » à un stock $k^* > 0$. Si $f(\cdot)$ satisfait les conditions d'Inada, un tel équilibre existe et il est unique : en appliquant la règle de l'Hospital,

$$\lim_{k\to 0^+} \left(s\frac{f(k)}{k} - n \right) = sf'(0) - n > 0,$$

et

$$\lim_{k\to \infty} \left(s\frac{f(k)}{k} - n \right) = -n < 0.$$

Pour tout $k > 0$, on a donc $sf(k) - nk > 0$ pour k suffisamment petit, et $sf(k) - nk < 0$ pour k suffisamment grand. L'existence suit de la continuité de $f(k)$; l'unicité du fait que $sf(k) - nk$ est une fonction concave (le rendement marginal du capital est décroissant).

Il est aussi globalement stable : l'équation de récurrence (2.13) peut se réécrire en fonction du taux de croissance du stock de capital par tête efficace,

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{1}{1+n} \left(s\frac{f(k_t)}{k_t} - n \right). \tag{2.15}$$

Le taux de croissance du capital par tête est positif lorsque le stock de capital est petit, négatif lorsqu'il est grand, et n'est nul qu'en $k = k^*$: il est donc positif pour tout $k < k^*$, et négatif pour tout $k > k^*$. En fait, la concavité de $f(k)$ et $f(0) = 0$ impliquent que le rendement moyen du capital $f(k)/k$ est décroissant. Ces propriétés sont reprises dans la figure 3.

Notons que la condition de stabilité locale de l'équilibre stationnaire

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{1 + sf'(k^*)}{1+n} < 1 \tag{2.16}$$

est nécessairement satisfaite. Nous l'utiliserons à plusieurs reprises dans la section 5.

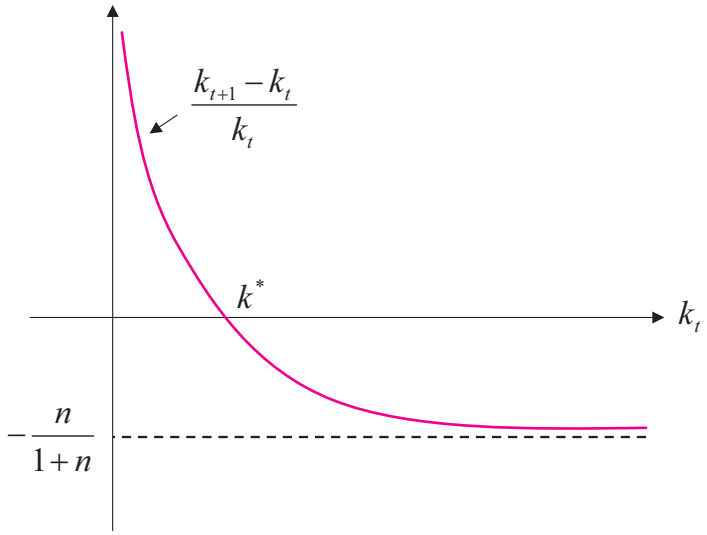


FIGURE 3
Taux de croissance du capital par tête

Le fait que $sf'(k^*) < n$ nous permet d'ores et déjà d'obtenir des propriétés de statique comparée de l'équilibre stationnaire. De (2.14), on a :

$$(sf'(k^*) - n)dk^* + f(k^*)ds - k^* dn = 0.$$

Une hausse du taux de croissance démographique ($dn > 0$) conduit à une hausse du taux de croissance du produit par tête à long terme (la population joue le rôle d'un facteur de production) et à une baisse du niveau du produit par tête (la population consomme des ressources) ; une hausse de la propension à épargner conduit à une hausse du produit par tête sans affecter le taux de croissance à long terme.

En reprenant la figure 1, on constate qu'au fur et à mesure de la croissance, le salaire occupe une place de plus en plus importante dans le PIB par tête, au détriment des revenus du capital. Mais le partage de la valeur ajoutée finit par se stabiliser.

Qu'en est-il de l'ensemble des faits stylisés de Kaldor ? Pour les discuter, nous avons vu dans le tableau 2 que la baisse de la durée du travail était compensée par une hausse de l'éducation qui limite la baisse de « l'efficacité » du travail. Considérons une fonction de production $F(K_{t-1}, A_t L_t)$ dont les deux facteurs de production sont le capital agrégé et le travail « efficace ». Dans le long terme, le stock de capital par tête (efficace) $k_t = K_{t-1}/A_t L_t$ reste constant : le stock de capital agrégé (et ainsi la production agrégée) croît donc au taux de croissance du travail efficace, $g_A + n$ (Faits 1 et 2), où g_A est le taux de croissance (exogène) de l'efficacité du travail. Le taux d'intérêt est égal à la productivité marginal du capital, $f'(k^\star)$: il est donc constant (Fait 3). Puisque le capital agrégé et la production agrégée croissent au même taux, le rapport K_{t-1}/Y_t reste lui aussi constant (Fait 4). Enfin, la part rK_{t-1}/Y_t est elle aussi constante ; tout comme celle du travail efficace, $wA_t L_t/Y_t =$ (Fait 5). Le produit par travailleur croît au

taux g_A exogène : on ne peut donc pas rendre compte du dernier fait stylisé de Kaldor (Fait 6) ; c'est l'un des objets de la théorie de la « croissance endogène ».

3.5. La règle d'or d'accumulation

Pour le stock de capital de long terme, la consommation par tête c^* est égale à la production par tête diminuée de l'épargne (ou de l'investissement) par tête, $f(k^*) - sf(k^*) = f(k^*) - nk^*$. Quelles sont les propriétés d'optimalité associées à cette situation ? Pour répondre à cette question, Phelps (1961) a choisi de retenir comme critère la consommation par tête de long terme : le but ultime n'est pas l'accumulation du capital, et une accumulation trop importante peut être néfaste à la consommation par tête lorsque le rendement marginal du capital est décroissant (et sous les conditions d'Inada, il devient même nul lorsque le stock de capital est arbitrairement grand).

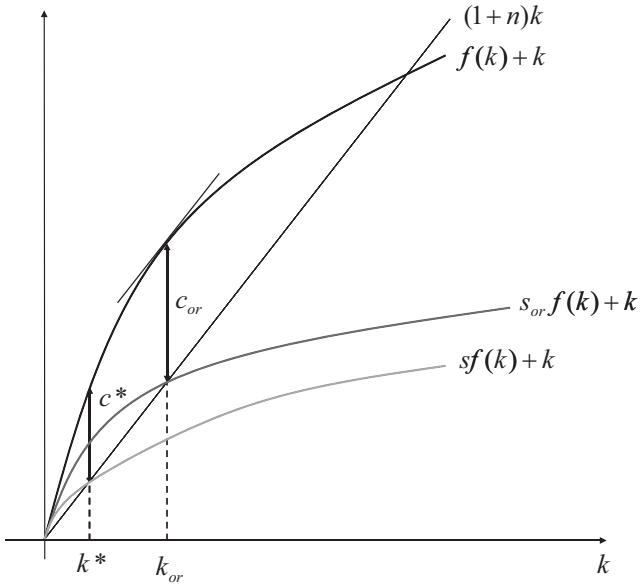


FIGURE 4
Règle d'or d'accumulation du capital : sous-accumulation

La règle d'or d'accumulation du capital est donnée par le taux d'épargne (d'investissement) qui maximise la consommation par tête constante que l'on peut accorder lors de chaque période[1].

1. L'expression « règle d'or » est due, semble-t-il, à Joan Robinson. Elle rappelle que chaque « génération » consomme à l'aide de l'effort d'accumulation des générations passées, et qu'elle épargne pour les générations futures ; elle obéit en un sens à l'une des règles d'or de la morale chrétienne : « Tout ce que vous voulez que les hommes fassent pour vous, faites-le de même pour eux, car c'est la loi et les prophètes »(Évangile selon saint Matthieu, VII, 12).

Soit $c(k) = f(k) - nk$ la consommation par tête pour un stock de capital stationnaire égal à k. Cette fonction est concave avec k ; elle est croissante pour k suffisamment petit ($f'(0) > n$). Aussi la consommation par tête sera-t-elle maximale pour un stock de capital de long terme k^*_{or} tel que $f'(k^*_{\text{or}}) = n$. Soit c^*_{or} la consommation correspondante. Elle est obtenue sur la figure 4 pour un stock de capital par tête tel que la pente de $f(k) + k$ est égale à celle de $(1 + n)k$. Sur cette figure, le stock de capital par tête k^* est inférieur au stock de long terme k^*_{or}. Dans ce cas, l'économie est en régime dit de « sous-accumulation ». Le stock de capital de la règle d'or est indépendant du taux d'épargne s. Par contre, le stock de capital stationnaire effectif est une fonction croissante du taux d'épargne. Si le taux s est très faible, la solution k^* de (2.14) devient très petite : elle est inférieure au stock k^*_{or}.

Cet argument suggère que le régime de sous-accumulation n'est pas le seul possible. Sur la figure 5, le stock de capital par tête k^*_{or} est inférieur au stock de long terme k^* ; comme on pouvait s'y attendre, la propension marginale à épargner s est cette fois trop forte : elle devrait être plus faible pour que l'économie atteigne la règle d'or (la propension s^*_{or} est celle pour laquelle l'économie converge vers la règle d'or dans le long terme). L'économie est alors en régime de « sous-accumulation ». Cette configuration est particulièrement inefficace. Pour le voir, supposons que l'économie se trouve initialement avec un stock k^* et une consommation par tête c^*, et que l'on puisse réduire de façon permanente la propension marginale à épargner de s à s^*_{or}. Cette baisse de la propension à épargner s'accompagne d'une baisse du stock de capital par tête jusqu'à k^*_{or}, et vous pouvez vérifier sur la figure que la consommation par tête augmente toujours (par rapport à la situation initiale de référence, où la propension marginale à épargner est s) ; la hausse initiale est Δc^* sur la figure.

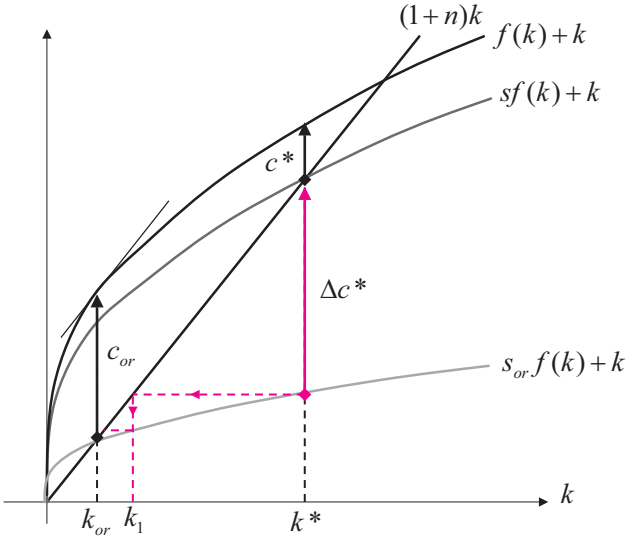


FIGURE 5
Règle d'or d'accumulation du capital : sur-accumulation

Pour cette raison, en régime de sur-accumulation, l'équilibre stationnaire k^* est dit « dynamiquement inefficace ». Il est au contraire « dynamiquement efficace » dans le régime de sous-accumulation.

La politique précédente peut être facilement mise en œuvre : il suffit que l'État taxe l'épargne au taux τ tel que $s(1-\tau) = s^*_{or}$, et qu'il mange la recette fiscale ! Repérez alors sur la figure la consommation par tête des ménages, $(1-s)f(k^*_{or})$, et celle de l'État, $(s-s^*_{or})f(k^*_{or})$.

L'économie française se trouve-t-elle plutôt en régime de sous-accumulation ou en régime de sur-accumulation ? Nous verrons dans les prochains chapitres plusieurs façons de répondre à cette question. Toutes conduisent en général à répondre affirmativement – cf. Abel *et al.* (1989). Pour l'instant, notons simplement que, pour $f(k) = k^\alpha$, les deux équations $s^*_{or} f(k^*_{or}) = (n+\delta)k^*_{or}$ et $f'(k^*_{or}) = n+\delta$ donnent $s^*_{or} = \alpha$, que l'on pose à environ 1/3. Le taux d'épargne effectif de notre économie est bien inférieur à $\alpha = 1/3$.

3.6. La convergence

Les économies pauvres tendent-elles à rattraper les économies plus riches ? De prime abord, le modèle de Solow prédit une forme de rattrapage : si le capital par tête est élevé, sa productivité est plus faible, et la croissance va se ralentir.

Deux formes de convergence sont habituellement distinguées : la convergence absolue et la convergence conditionnelle. Dans le premier cas, on restreint l'attention à un groupe de pays dont les équilibres de long terme sont relativement proches les uns des autres (ils ont notamment des taux d'épargne, des taux de croissance démographique, des taux de dépréciation du capital et des techniques de production voisines). La figure 3 ou la formule (2.15) implique que le taux de croissance du revenu par tête devrait être d'autant plus important que le revenu par tête était bas initialement. La figure 6, tirée de DeLong (1988), semble valider cette prédiction pour un groupe de 16 pays de l'OCDE dont les caractéristiques économiques pertinentes sont proches.

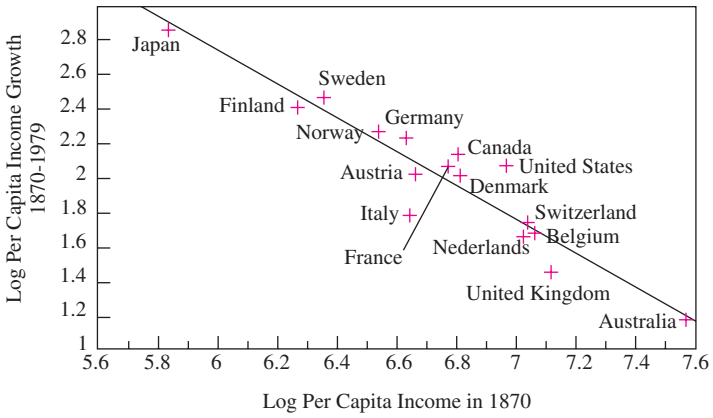


FIGURE 6
Convergence absolue : un point de vue *ex post*

Elle souffre toutefois d'un « biais de sélection » : puisque ces économies sont proches aujourd'hui et l'étaient moins il y a un siècle, comment pourrait-il en être autrement ? Si l'on prend en compte un ensemble plus large de pays que Maddison jugeait proches les uns des autres il y a cent ans, et non pas aujourd'hui, le tableau change radicalement, comme l'illustre la figure 7, tirée elle aussi de DeLong (1988). On admet en général que l'hypothèse de convergence absolue est invalidée.

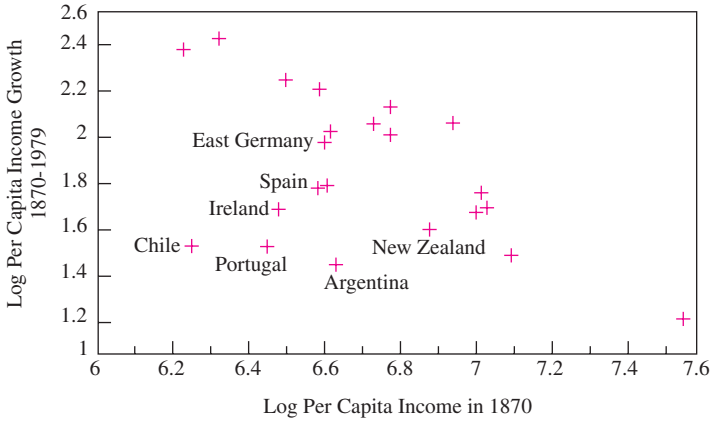


FIGURE 7
Convergence absolue : un point de vue *ex ante*

L'hypothèse de convergence conditionnelle ne concerne pas des pays similaires. La figure 3 prédit que le taux de croissance de la production par tête sera d'autant plus élevé que le stock de capital par tête est faible par rapport à sa valeur de long terme. Il est donc possible que deux pays, l'un pauvre et l'autre riche, aient le même taux de croissance, et qu'aucun rattrapage ne se fasse. Une difficulté consiste en pratique à retenir des indicateurs pertinents de l'équilibre de long terme. Barro et Sala-i-Martin (2003), chapitre 12, utilisent entre autres les dépenses publiques d'infrastructures, la stabilité de la législation, la nature démocratique du régime. Ils concluent plutôt en faveur de cette hypothèse.

Remarque 2.1

Le taux de croissance de l'efficacité du travail a été supposé exogène. Les « théories de la croissance endogène » ont cherché à rendre compte de ce taux de croissance (et plus généralement de celui de la productivité globale des facteurs) ; en fait, à ce qu'il ne soit pas déterminé « directement et uniquement par des causes exogènes »(Malinvaud, 1993). Supposons par exemple que la population reste constante, $L_t = L$ pour tout t, que la fonction de production soit de type Cobb-Douglas, $Y_t = (L)^{1-\alpha}K_t^{\alpha}$ mais que A_t soit maintenant égal à K_t et soit traité comme un effet externe par l'entreprise. On a alors : $Y_t = L^{1-\alpha}K_t \equiv AK_t$; ou bien encore, en grandeurs par tête, $y_t = f(k_t) = Ak_t$. En remplaçant dans (2.15), pour $n = 0$, on en déduit le taux de croissance de l'économie :

$$\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = sA.$$

Au niveau agrégé, le rendement du capital n'est plus décroissant, mais constant. L'économie croît continûment au taux sA ; d'autant plus fortement qu'elle épargne une proportion importante de son revenu.

4. CROISSANCE, INÉGALITÉ ET TAXATION DU CAPITAL

L'imposition des revenus du capital en France se fait pour l'essentiel au travers de l'impôt sur les sociétés (pour les sociétés de capitaux) et de l'impôt sur le revenu (pour les entrepreneurs individuels et certains revenus de l'épargne). L'impôt sur les sociétés représentait 43,7 Md€ en 2006, soit 20 % des recettes fiscales nettes du budget général de l'État[1]. Le taux d'imposition des bénéfices a beaucoup baissé depuis 20 ans : de 50 % en 1986 à 33 % aujourd'hui. Cette section s'intéresse aux conséquences de cette politique, telles que prédites par le modèle de Solow ou des variantes de ce modèle. On distinguera deux types d'effets : ceux qui portent sur le stock de capital par tête à long terme, et ceux qui portent sur la distribution des gains entre le capital et le travail. Comme on peut le deviner, une moindre imposition des revenus du capital augmente le stock de capital par tête à long terme, mais ce mouvement réduit le taux d'intérêt réel et accroît le salaire : la politique ne bénéficie donc pas seulement au capital !

4.1. L'imposition dans le long terme

Supposons que l'État décide de taxer les revenus du capital et d'utiliser la recette pour acheter des biens de consommation (un argument symétrique s'appliquerait au cas d'une baisse du taux d'imposition). Lorsque l'entreprise verse $r_t k_t = f'(k_t)k_t$, le ménage reçoit seulement $(1-\tau)f'(k_t)k_t$ et son revenu est donc égal à $(1-\tau)r_t k_t + w_t$. Il s'ensuit que l'épargne par tête est réduite : pour tout k_t, le stock de capital par tête k_{t+1} est inférieur à celui qui prévaudrait en l'absence de taxe. Formellement, la dynamique d'équilibre (2.13) devient :

$$s((1-\tau)r_t k_t + w_t) = (1+n)k_{t+1} - k_t,$$

ou bien encore, comme $w_t = f(k_t) - r_t k_t$,

$$s(f(k_t) - \tau f'(k_t)k_t) = (1+n)k_{t+1} - k_t.$$

La baisse du stock de capital par tête conduit à une hausse du taux d'intérêt et à une baisse du salaire. La taxe sur les revenus du capital est donc reportée, au moins en partie, sur le travail, au sens où les travailleurs souffrent eux aussi d'une taxe acquittée par les capitalistes. C'est un exemple d'incidence fiscale. Plaçons-nous à l'équilibre stationnaire :

$$s(f(k^*) - \tau f'(k^*)k^*) = nk^*.$$

1. Tableaux de l'Économie Française 2007. Accessible en ligne depuis le site de l'INSEE (http ://www.insee.fr).

Supposons que le taux de taxe soit initialement nul et qu'on le porte à un niveau positif (soit, $\tau = 0$ initialement). Le stock de capital par tête réagit de la façon suivante :

$$\frac{dk^*}{d\tau} = \frac{sf'(k^*)}{sf'(k^*) - n} k^* < 0,$$

ce qui est négatif puisque l'équilibre stationnaire est localement stable pour $\tau = 0$, c'est-à-dire $sf'(k^*) < n$ par (2.16). Une hausse du taux τ réduit le revenu, donc l'épargne (pour tout stock de capital par tête), et donc le stock de capital par tête à long terme.

4.2. Le modèle classique d'épargne

Kaldor (1956) a développé un modèle d'épargne, le « modèle classique d'épargne », dans lequel les propensions à épargner sont toujours constantes mais diffèrent selon le type de revenu que perçoit l'individu : une part s_r du revenu du capital et une part s_w des salaires sont épargnées. Soit :

$$s_t = s_r r_t k_t + s_w w_t.$$

Dans la version extrême de ce modèle où $s_w = 0$, la dynamique d'équilibre est décrite par :

$$s_r f'(k_t) k_t = (1+n) k_{t+1} - k_t.$$

Supposons qu'il existe un équilibre stationnaire (c'est le cas si la fonction de production f est de type Cobb-Douglas, de sorte que $f'(k_t)k_t = \alpha f(k_t)$, quand les conditions d'Inada sont satisfaites). Cet équilibre est tel que

$$s_r f'(k_0^*) k_0^* = n k_0^* \tag{2.17}$$

en l'absence de taxe sur les revenus du capital, et tel que

$$s_r (1-\tau) f'(k_1^*) k_1^* = n k_1^* \tag{2.18}$$

en présence d'une telle taxe. On en déduit immédiatement que :

$$f'(k_0^*) = (1-\tau) f'(k_1^*).$$

Dans le cas où l'épargne ne provient que des revenus du capital, la mise en place d'une taxe sur ces revenus conduit à une baisse du stock de capital par tête à long terme qui laisse inchangé le revenu unitaire net (après impôt) du capital. Comme $d((1-\tau)f'(k^*)) = 0$, le taux d'intérêt s'élève, $df'(k^*) = f'(k^*)d\tau/(1-\tau) > 0$, et donc le stock de capital par tête stationnaire baisse. Implicitement, nous avons supposé que tout le revenu de l'impôt est affecté à la consommation : $y_t = (1-\tau)r_t k_t + w_t + \tau r_t k_t$. On a donc $dw^* = -k^* df'(k^*) < 0$: la taxe sur les revenus du capital ne fait que baisser le salaire réel (Feldstein, 1974).

Si une partie des revenus du travail est épargnée, $s_w > 0$, le revenu net du capital a cette fois tendance à baisser, mais le poids de la taxe est encore en partie reporté sur le salaire.

Peut-on altérer l'incidence en faveur du travail ? L'idée la plus naturelle consiste à utiliser la recette fiscale, non pas pour acheter des biens, mais pour financer un transfert T vers le travail. On a alors :

$$s_t = s_r(1-\tau)r_t k_t + s_w(w_t + T),$$

avec

$$T = \tau r_t k_t.$$

L'épargne par tête a tendance à baisser si $s_r > s_w$, ce que nous supposerons. Alors, le stock de capital par tête baisse, ce qui fait augmenter le taux d'intérêt : une partie de la taxe est reportée sur le travail, mais la baisse du salaire peut cette fois être compensée par le transfert public.

Plaçons-nous, comme précédemment, dans le cas extrême où $s_w = 0$. Alors, le stock de capital par tête stationnaire est le stock k_1^* ; et, $d((1-\tau)f'(k_1^*)) = 0$[1]. On s'intéresse à

$$d(w_t + T) = d(f(k_1^*) - (1-\tau)f'(k_1^*)k_1^*) = \tau f'(k_1^*))dk_1^*.$$

Au point $\tau = 0$, le transfert est juste suffisant pour compenser la baisse du salaire ; en fait, ni le revenu net d'une unité de capital, ni le salaire, ne changent par rapport à la situation où l'État n'intervient pas. Plus généralement, pour $\tau > 0$, le revenu du travail, même compensé par le transfert, baisse.

4.3. Capitalistes et travailleurs

Il est tentant de lire les résultats précédents en assimilant revenus du" capital et revenus des capitalistes, et revenus du travail et revenus des travailleurs. C'est ce que nous avons d'ailleurs plus ou moins fait. Cette assimilation est bien sûr caricaturale, notamment parce que les déciles supérieurs de la distribution des revenus sont ceux qui perçoivent la plus grosse partie des revenus du capital, mais qu'ils touchent aussi des revenus d'activité importants ; cf. figure 8, tirée de Landais (2006).

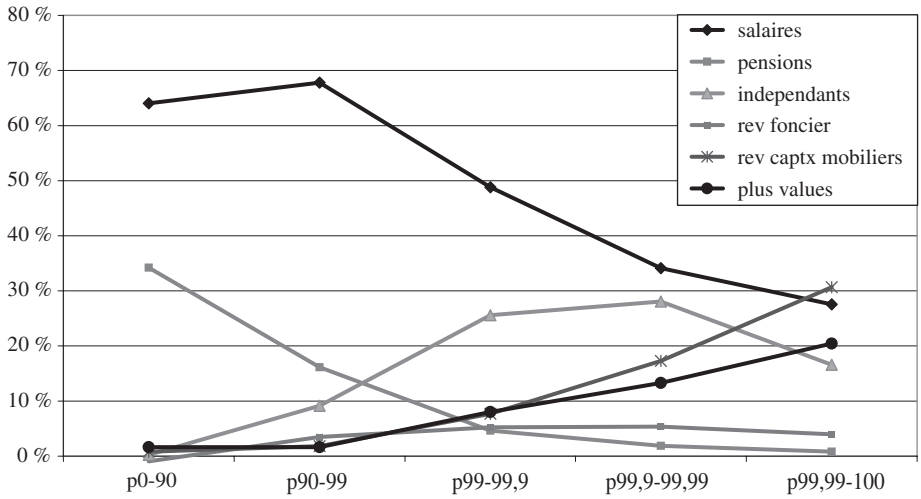
Pasinetti (1962) a amendé le modèle de Solow en étudiant une variante dans laquelle il y a deux classes d'individus, les travailleurs et les capitalistes, indicés par l et c respectivement. Supposons que les travailleurs possèdent le stock k_t^l à la date t, le reste, $k_t^c = k_t - k_t^l$ étant détenu par les capitalistes. Le comportement d'épargne diffère maintenant à la fois selon le type de revenu et le type de détenteur du facteur de production. Avec des notations évidentes, l'épargne par tête de travailleur s'écrit :

$$s_t^l = s_r^l(1-\tau)r_t k_t^l + s_w^l w_t,$$

avec $r_t = f'(k_t)$ et $w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t$. Celle des capitalistes s'écrit :

$$s_t^c = s_r^c(1-\tau)r_t k_t^c + s_w^c w_t.$$

1. Le même argument que précédemment s'applique puisque l'utilisation des recettes fiscales n'influence pas l'accumulation du capital lorsque ni les salariés ni l'État n'épargnent.



Source : Tableau 23 et suivants en Annexes
Lecture : le fractile P0-90 désigne les 90 % des foyers les moins riches; le fractile P90-99 désigne les foyers dont le revenu est supérieur au revenu seuil des 10 % des foyers les plus riches mais inférieur au revenu seuil des 1 % des foyers les plus riches; etc.En 1998, les salaires et assimilés représentaient en moyenne 62 % du revenu total déclaré en moyenne par les 90 % des foyers les moins riches.

FIGURE 8
Composition des revenus par décile de revenu en France en 2005

Les équations d'accumulation du capital par tête détenu par les travailleurs et les capitalistes deviennent :

$$s_r^l(1-\tau)f'(k_t)k_t^l + s_w^l\left(f(k_t) - f'(k_t)k_t\right) = (1+n)k_{t+1}^l - k_t^l,$$

et

$$s_r^c(1-\tau)f'(k_t)k_t^c + s_w^c\left(f(k_t) - f'(k_t)k_t\right) = (1+n)k_{t+1}^c - k_t^c.$$

Suivons Gupta (1976) et supposons que $s_w^c = 0$. Alors, en un état stationnaire, on a :

$$s_r^l(1-\tau)f'(k)k^l + s_w^l\left(f(k) - f'(k)k\right) = nk^l, \tag{2.19}$$

$$s_r^c(1-\tau)f'(k)k^c = nk^c. \tag{2.20}$$

La deuxième équation détermine à nouveau le rendement net du capital indépendamment du taux de taxe τ :

$$(1-\tau)f'(k) = \frac{n}{s_r^c}, \tag{2.21}$$

ce qui montre que le stock de capital par tête s'ajuste de sorte à maintenir inchangé le revenu du capital, l'intégralité de taxe étant en ce sens reportée sur les salaires, indépendamment du comportement des travailleurs, c'est-à-dire même s'ils épargnent une partie de leurs revenus d'activité.

4.4. Incidence de la fiscalité

À court terme, le stock de capital agrégé et l'offre de travail sont donnés, et ainsi sont également donnés le stock de capital par tête k_t et la productivité marginale du capital du point de vue de l'entreprise, $r_t = f'(k_t)$. Il s'ensuit que le revenu net du capital pour ceux qui le détiennent, $(1-\tau)f'(k_t)k_t$ est amputé de $\tau f'(k_t)k_t$, c'est-à-dire de l'intégralité de la recette fiscale, tandis que le salaire, $f(k_t) - f'(k_t)k_t$ reste à sa valeur initiale. L'effet immédiat d'une taxe sur les revenus du capital peut donc être très différent de son effet à long terme sur le partage de la valeur ajoutée.

Si la transition vers le nouvel équilibre stationnaire est longue, l'incidence de la mesure à long terme devrait être contrebalancée par l'incidence à plus court terme. De quels facteurs dépend donc cette vitesse de transition ? Pour répondre à cette question, reprenons le cas classique de la section 5.2, dans lequel $s_w = 0$. On a :

$$s_r(1-\tau)r_t k_t = (1+n)k_{t+1} - k_t,$$

$$r_t = f'(k_t),$$

$$w_t = f(k_t) - r_t k_t.$$

Supposons que l'économie se trouve initialement à son équilibre de long terme sous laissez-faire, et imposons alors une petite taxe $d\tau$ sur le revenu du capital. En linéarisant les deux premières équations, on obtient :

$$s_r r^* dk_t + s_r k^* dr_t - s_r r^* k^* d\tau = (1+n)dk_{t+1} - dk_t,$$

$$dr_t = f''(k^*)dk_t.$$

Soit :

$$(1+n)dk_{t+1} = (1 + s_r r^* + s_r k^* f''(k^*))dk_t - s_r r^* k^* d\tau. \tag{2.22}$$

La variation du stock de capital à long terme s'obtient en posant $dk_{t+1} = dk_t = dk^*$ et en utilisant $s_r r^* = n$:

$$\frac{dk^*}{k^*} = \frac{d\tau}{\sigma_r^*},$$

où σ_r^* est l'élasticité du taux d'intérêt d'équilibre évaluée au point k^*, soit $k^* f''(k^*)/f'(k^*) < 0$. Comme on se trouve dans le cas classique, le revenu (unitaire) net du capital ne change pas à long terme. La solution générale de (2.22) est

$$dk_t = \beta^t dk_0 + \left(1-\beta^t\right)dk^* = \left(1-\beta^t\right)dk^*,$$

avec

$$\beta = 1 + \frac{n}{1+n}\sigma_r^* \simeq 1 + n\sigma_r^*.$$

L'approximation est obtenue pour n proche de 0. Lorsque $|\beta|$ est proche de 0, l'ajustement vers la situation de long terme est très rapide. Dans le cas d'une fonction de production Cobb-Douglas, il est facile de vérifier que $\sigma_r^* = -(1-\alpha)$, où α est la part des revenus du capital dans la valeur ajoutée. Pour $\alpha = 1/3$ et n petit ($n = 0.02$ par exemple), l'ajustement sera très lent à se réaliser complètement.

5. EXERCICES ET PROBLÈMES

5.1. Investissement et q de Tobin

On considère une entreprise pendant une infinité de périodes $t = 0, \ldots, +\infty$. Les prix du bien produit et du capital sont normalisés à 1.

À chaque période t, l'entreprise produit une quantité $A_t K_t$ de biens, où K_t est son stock de capital et A_t la productivité du capital. À la fin de la période, l'entreprise investit I_t pour porter son stock de capital de la période suivante à $K_{t+1} = K_t + I_t$.

L'installation de ce nouveau capital coûte, en plus de son prix d'achat, $C(I_t, K_t)$ avec $C(0,K) = 0$, $C_I(0,K) = 0$, $C_{II} > 0$ et $C_K \leqslant 0$.

L'entreprise dispose d'un stock initial de capital K_0 fixé. Enfin, elle a accès à un marché financier parfait dont le taux d'intérêt réel est constant et égal à r.

1. Interprétez la forme du coût d'ajustement du capital.
2. Écrivez le programme de l'entreprise.
3. Déterminez les conditions du premier ordre et montrer que le multiplicateur de Lagrange de la contrainte d'accumulation du capital peut s'écrire :

$$q_t = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^s} [A_{t+s} - C_K(I_{t+s}, K_{t+s})].$$

   On l'appelle le q de Tobin.
4. Déterminez le lien entre l'investissement et le q de Tobin.

   Application 1 : q de Tobin et valorisation de l'entreprise.

   On suppose que le coût d'ajustement s'écrit :

$$C(I,K) = K \times \phi\left(\frac{I}{K}\right),$$

   avec $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 0$ et $\phi'' > 0$.
5. Montrez que la solution (I_t, K_t) du programme de maximisation de l'entreprise est proportionnelle à K_0.
6. Calculez la valeur V_0 de l'entreprise au début de la date 0 et montrer qu'elle est proportionnelle à K_0.
7. Déduisez-en que :

$$q_t = \frac{V_t}{K_t},$$

   où V_t est la valeur de la firme au début de la date t.
8. Commentez la figure 9.

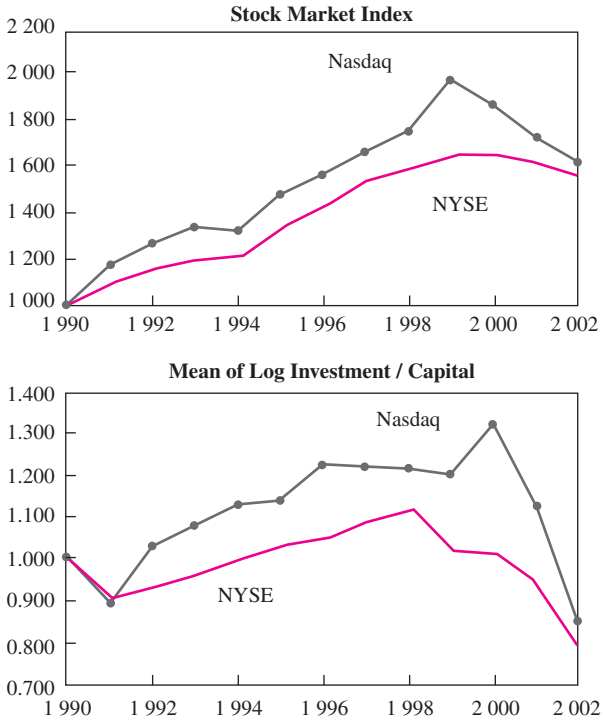


FIGURE 9
Indice boursier et investissement des entreprises cotées au New York Stock Exchange et au Nasdaq.

Application 2 : q de Tobin et incertitude.

On suppose dans la question suivante que le coût d'ajustement s'écrit :

$$C(I,K) = \psi(I),$$

avec $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$ et $\psi'' > 0$.

9. Montrez que si la productivité du capital croît au taux $g < r$, alors :

$$q_t = A_t \frac{1+g}{r-g}.$$

En étudiant l'impact de l'incertitude (relative à g) sur le q de Tobin, proposer une analyse de la situation du secteur des nouvelles technologies à la fin des années 1990.

Éléments de correction

1. À K fixé, le coût d'ajustement est une fonction convexe de l'investissement, nul en $I = 0$ et positif pour $I \neq 0$: tout ajustement du stock de capital est coûteux, que ce soit une augmentation ou une diminution de la quantité d'actifs dans l'entreprise.

Enfin, (dés)investir une quantité donnée I est moins coûteux lorsque l'entreprise est plus grosse (son stock de capital est plus important) : c'est la taille relative (à la taille l'entreprise) de l'investissement qui est pertinente.

2. Le programme de l'entreprise est :

$$\begin{array}{cc} \max_{\{K_t\}_{t\geqslant 1},\{I_t\}_{t\geqslant 0}} & \displaystyle\sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^t}[A_t K_t - I_t - C(I_t,K_t)], \\ \text{s.c.} & K_{t+1} \leqslant K_t + I_t,\ \forall t \geqslant 0. \end{array}$$

3. Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^t}[A_t K_t - I_t - C(I_t,K_t) + q_t(K_t + I_t - K_{t+1})].$$

Les conditions du premier ordre par rapport à K_{t+1} et I_t sont, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial K_{t+1}} = 0 &\iff q_t = \frac{1}{1+r}[A_{t+1} - C_K(I_{t+1},K_{t+1}) + q_{t+1}], \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial I_t} = 0 &\iff C_I(I_t,K_t) = q_t - 1. \end{aligned}$$

La première se réécrit (par récurrence) :

$$q_t = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^s}[A_{t+s} - C_K(I_{t+s},K_{t+s})].$$

Ici, q_t est la valeur actualisée d'une unité d'investissement en t. Cette valeur se décompose en deux termes à chaque date $t+s$: A_{t+s} est la productivité marginale du capital, $-C_K(I_{t+s},K_{t+s}) \geqslant 0$ est la réduction du coût d'ajustement lorsque l'entreprise est plus grosse (car l'ajustement est plus petit relativement à la taille de l'entreprise). On retrouve l'interprétation du multiplicateur de Lagrange : en relâchant la contrainte en t d'une unité (en augmentant K_t de 1), on augmente la fonction à maximiser de la valeur du multiplicateur q_t.

4. La condition du premier ordre par rapport à I_t montre qu'il faut investir lorsque $q_t \geqslant 1$ et désinvestir lorsque $q_t \leqslant 1$ (représenter graphiquement C_I en fonction de I_t). C'est la somme actualisée des rendements futurs qui détermine l'investissement aujourd'hui.

   L'investissement réagit d'autant plus à q_t que C_I n'est pas trop grand.

5. Avec cette forme pour $C(.,.)$, l'investissement et le coût d'ajustement sont pris en fraction de la taille de l'entreprise : (dés)investir pour une fraction x de la taille de l'entreprise ($I = x \times K$) coûte une fraction $\phi(x)$ de la taille de l'entreprise ($\phi(x) \times K$). En particulier, un investissement de taille donnée est moins coûteux si l'entreprise est plus grande :

$$C_K = \phi\left(\frac{I}{K}\right) - \frac{I}{K}\phi'\left(\frac{I}{K}\right) < 0$$

car $\phi(.)$ est convexe.

Le programme que l'on a résolu aux questions précédentes nous a donné les I_t pour $t \geqslant 0$ et K_t pour $t \geqslant 1$, en fonction du stock initial de capital K_0 qui est une donnée du problème. La solution est caractérisée par les équations (en remplaçant $C(.,.)$ par son expression) :

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^s} \left[A_{t+s} + \frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \phi' \left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) - \phi \left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}} \right) \right]$$

$$= 1 + \phi' \left(\frac{I_t}{K_t} \right), \qquad t \geqslant 0,$$

et

$$K_{t+1} = K_t + I_t, \qquad t \geqslant 0.$$

On voit alors que la solution est proportionnelle à K_0. En effet, si K_0 est multiplié par une constante, il suffit de multiplier tous les I_t, $t \geqslant 0$, et K_t, $t \geqslant 1$, par la même constante pour que ces deux équations restent satisfaites pour tout $t \geqslant 0$.

6. La valeur d'une entreprise est la somme actualisée de ses profits futurs, donc

$$V_0 = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \left[A_t K_t - I_t - K_t \phi \left(\frac{I_t}{K_t} \right) \right].$$

Si tous les K_t et I_t sont multipliés par même constante, V_0 est multipliée par la même constante. V_0 est donc, d'après la question précédente, proportionnelle à K_0.

7. Souvenons-nous que le multiplicateur de Lagrange mesure de combien la fonction objectif augmente lorsque la contrainte associée est relâchée de 1. Cela signifie que le q de Tobin est égal au rendement marginal du capital, en particulier, pour $t = 0$,

$$q_0 = \frac{\partial V_0}{\partial K_0}.$$

Or on a montré à la question précédente que :

$$\frac{\partial V_0}{\partial K_0} = \frac{V_0}{K_0}.$$

Donc $q_0 = V_0/K_0$. Enfin, le raisonnement aboutissant à ce résultat peut être fait en décalant l'origine des temps, donc il est vrai pour tout t :

$$q_t = \frac{V_t}{K_t}.$$

Remarque : q_t est appelé le q de Tobin marginal (c'est la valeur marginale du capital, i.e., la valeur d'une unité supplémentaire de capital) et V_t/K_t est le q de Tobin moyen (c'est la valeur moyenne du capital). Nous venons de montrer que dans le cas où les rendements d'échelle sont constants (production proportionnelle à K) et les coûts d'échelle aussi (coût d'ajustement proportionnel à K), alors le q marginal et le q moyen de Tobin sont égaux.

8. On teste ici le résultat de la question précédente. On représente pour cela l'évolution de la valeur de marché des entreprises et leur investissement, et ce pour deux bourses américaines : le New York Stock Exchange et le Nasdaq (entreprises de nouvelles technologies). Les évidences empiriques sont compatibles avec les prédictions de la théorie.

   Notons toutefois l'approximation (de taille) qui est faite dans ce test. Les indices boursiers reflètent la valeur de marché des actions, or les actions ne constituent qu'une partie de la valeur des firmes, l'autre partie étant constituée par la dette.

9. Lorsque $C_K = 0$ et $A_{t+s} = A_t(1+g)^s$, le q de Tobin (marginal) vaut

$$q_t = \sum_{s=1}^{+\infty} A_t \frac{(1+g)^s}{(1+r)^s} = A_t \frac{1+g}{1+r} \frac{1}{1-\frac{1+g}{1+r}} = A_t \frac{1+g}{r-g}.$$

   q_t est une fonction croissante de g, ce qui est très intuitif. C'est également une fonction convexe de g, ce qui implique que l'incertitude quant à g augmente l'espérance de q_t. Par exemple, si la réalisation de g est $g-z$ ou $g+z$ de manière équiprobable, alors $E[q_t]$ augmente avec z (le voir graphiquement).

   Ceci peut être un des éléments explicatifs de la situation du secteur des nouvelles technologies à la fin des années 1990. L'incertitude quant au taux de croissance de ce nouveau secteur est alors très incertain (z grand), la valeur marginale de l'investissement (le q de Tobin) est par conséquent élevée. Selon cette explication, il n'y a pas besoin de recourir à l'irrationalité des investisseurs, ni à la présence d'une bulle, pour expliquer les investissements massifs dans le secteur des nouvelles technologies à la fin des années 1990, ainsi que la valorisation élevée des actions de ce secteur[1]. Dans ce cas, si par exemple la réalisation de g est égale à son espérance, les entreprises ont *ex post* trop investi car le q de Tobin réalisé est alors inférieur à son espérance,

$$E\left[A_t \frac{1+g}{r-g}\right] > A_t \frac{1+g}{r-E[g]}$$

   par l'inégalité de Jensen. L'intuition est bien résumée par Bill Miller, un gérant du fonds américain Legg Mason, en 1999 : « Being wrong isn't very costly, and being right has a high payoff. »

5.2. La comptabilité de la croissance

On considère une économie dans laquelle le temps t s'écoule continûment. La fonction de production est

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t),$$

1. Notons toutefois qu'avec la spécification du coût d'ajustement retenue dans cette question, la valeur de l'entreprise est différente du q marginal de Tobin. Mais on peut facilement se convaincre que si la relation $q = V/K$ ne tient plus ici, elle reste qualitativement valable.

où Y_t désigne la production à la date t, K_t le stock de capital, L_t la quantité de travail, A_t la productivité globale des facteurs. $F(.,.)$ est croissante et concave par rapport à chacun de ses arguments, et à rendements d'échelle constants.

On suppose que les entreprises sont en concurrence parfaite.

Enfin, on normalise le prix du bien à $p_t = 1$, et on note w_t le salaire et r_t le taux d'intérêt.

1. Montrez que les facteurs de production sont rémunérés à leur productivité marginale.
2. Montrez que le profit est nul. Expliquer cet apparent paradoxe.
3. On note avec un point la dérivée par rapport au temps, et $g_X = \dot{X}_t / X_t$ le taux de croissance d'une variable X. Calculez g_Y en fonction de g_A, g_K, g_L et α la part de la rémunération du capital dans la valeur ajoutée.
4. Écrivez le taux de croissance $g_{Y/L}$ de la productivité moyenne du travail en fonction des taux de croissance g_A de la productivité globale des facteurs et $g_{K/L}$ du capital par tête.
5. En considérant une fonction de production $Y_t = A_t F(K_t, B_t L_t)$, décomposez la croissance selon les modalités du tableau ci-dessous. Quels ont été les facteurs de la forte croissance qu'a connue l'économie américaine entre 1995 et 1998 ?

Période		1959-98	1959-73	1973-90	**1990-95**	**1995-98**
Production domestique		3,63	4,32	3,12	**2,74**	**4,72**
Heures travaillées		1,58	1,37	1,68	**1,37**	**2,35**
Productivité du travail		2,04	2,94	1,43	**1,36**	**2,37**
Dont :	- capital par tête	1,10	1,49	0,90	**0,63**	**1,13**
	- qualité du travail	0,31	0,44	0,20	**0,37**	**0,25**
	- PGF	0,62	1,00	0,33	**0,35**	**0,98**

TABLEAU 1
États-Unis, 1959-1998 : Contribution des différents facteurs à la croissance (*source* : OCDE)

Éléments de correction

1. Les entreprises sont en concurrence parfaite à la fois sur le marché des biens et sur les marchés des facteurs de production, les marchés du travail et du capital. Elles prennent donc les prix sur ces marchés, p_t, w_t et r_t, comme exogènes. Elles demandent les quantités des facteurs de production K_t et L_t de sorte à maximiser leur profit

$$A_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t K_t.$$

Les conditions du premier ordre par rapport à K_t et L_t donnent :

$$A_t F'_K(K_t, L_t) = r_t$$

et

$$A_t F'_L(K_t, L_t) = w_t.$$

Les termes de gauche sont les productivités marginales des facteurs et les termes de droite leurs prix.

2. Le profit de l'entreprise représentative vaut

$$A_t F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t K_t$$

$$= A_t [F(K_t, L_t) - F_L(K_t, L_t) L_t - F_K(K_t, L_t) K_t].$$

Or la fonction de production est à rendements constants, donc homogène de degré 1, donc le crochet dans l'expression précédente est nul[1].

Ce résultat (concurrence parfaite et rendements constants impliquent un profit nul) semble contredire l'expérience quotidienne. Ce paradoxe n'en est pas un : il vient de ce que le profit désigne pour les économistes ce qu'il reste à l'entreprise après rémunération des facteurs de production (travail et capital), alors qu'il désigne dans le langage commun ce qu'il reste après rémunération du travail (les salaires) et d'une partie seulement du capital (la dette mais pas les actions).

3. On calcule la dérivée logarithmique de $Y_t = A_t F(K_t, L_t)$ (cela signifie que l'on prend le logarithme de cette expression, puis que l'on dérive), ce qui revient comme nous allons le voir à calculer un taux de croissance. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4. On prend le logarithme :

$$\ln(Y_t) = \ln(A_t F(K_t, L_t)) = \ln(A_t) + \ln(F(K_t, L_t)).$$

On dérive par rapport au temps :

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{\dot{K}_t F'_K(K_t, L_t) + \dot{L}_t F'_L(K_t, L_t)}{F(K_t, L_t)}$$

$$= \frac{\dot{A}_t}{A_t} + \frac{\dot{K}_t}{K_t} \frac{r_t K_t}{A_t F(K_t, L_t)} + \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{w_t L_t}{A_t F(K_t, L_t)}.$$

Cette expression se réécrit :

$$g_Y = g_A + \alpha g_K + (1 - \alpha) g_L,$$

1. Théorème d'Euler : Soit $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction différentiable et homogène de degré 1, c'est-à-dire que pour tout réel λ, $F(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda F(x_1, ..., x_n)$. Alors :

$$F(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n).$$

où $\alpha = r_t K_t/(A_t F(K_t, L_t))$ est la part de la rémunération du capital dans la valeur ajoutée[1]. Cette relation est appelée la décomposition de Solow. Le taux de croissance de la valeur ajoutée est la somme pondérée des taux de croissance de chaque facteur de production, où les poids sont les parts de leur rémunération dans la valeur ajoutée, et d'un terme g_A appelé résidu de Solow. C'est la partie de la croissance qui n'est pas expliquée par la croissance des facteurs de production. Il mesure l'évolution de l'efficacité globale du système de production (que l'on appelle productivité globale des facteurs, PGF), qui est fonction de l'évolution technologique, de l'environnement des entreprises, de l'organisation de la production, etc.

4. Rappelons à ce stade les propriétés de la différentielle logarithmique :

$$g_{AB} = \frac{\dot{AB}}{AB} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} = g_A + g_B$$

$$g_{A/B} = \frac{\dot{A/B}}{A/B} = \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} = g_A - g_B$$

$$g_{A^\alpha} = \frac{\dot{A^\alpha}}{A^\alpha} = \alpha \frac{\dot{A}}{A} = \alpha g_A$$

Le taux de croissance de Y_t/L_t vaut :

$$g_{Y/L} = g_Y - g_L = g_A + \alpha(g_K - g_L) = g_A + \alpha g_{K/L}.$$

La hausse de la productivité par tête comprend deux composantes : l'augmentation de la PGF et la variation du capital par tête, qui mesure l'intensité capitalistique du processus de production.

5. On a :

$$g_Y = g_L + g_{Y/L},$$

où, en procédant comme aux questions précédentes,

$$g_{Y/L} = g_A + \alpha g_{K/L} + (1-\alpha) g_B.$$

Les six lignes du tableau 1 correspondent respectivement à g_Y, g_L, $g_{Y/L}$, $\alpha g_{K/L}$, $(1-\alpha)g_B$ et g_A. La productivité moyenne du travail a connu un accroissement sensible aux États-Unis : elle est passée de 1,37 % par an en moyenne sur la période 1990-1995 à 2,35 % sur la période 1995-1998. Cette hausse de 1 point par an entre les deux périodes est due pour 0,65 point à la hausse de la PGF (liée à la réorganisation interne des entreprises et à l'introduction des technologies de l'information), pour 0,5 point à l'accroissement du stock de capital (lié à l'investissement massif depuis le début des années 1990, principalement en produits à fort contenu en technologies de l'information). Elle a été en revanche

1. Notez que l'on devrait écrire α_t. Nous verrons un plus loin dans l'exercice que α est constante (indépendante de K_t et L_t) dans le cas Cobb-Douglas, mais ce n'est pas vrai dans le cas général que nous considérons ici.

affectée par la baisse de la qualité moyenne du travail (la croissance et la baisse du chômage ayant permis le retour sur le marché du travail des moins qualifiés). La hausse de la productivité du travail explique à son tour la moitié de l'accélération de deux points par an de la production, l'autre moitié étant expliquée par l'augmentation de la force de travail.

5.3. Le modèle de Solow

On suppose une fonction de production avec du progrès technique portant sur le travail (A_tL_t est la quantité de travail efficace) :

$$Y_t = F(K_t, A_tL_t),$$

avec $F_K > 0$, $F_L > 0$, $F_{KK} < 0$, $F_{LL} < 0$ et $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ pour tout $\lambda \geqslant 0$.

La quantité de travail L_t et son efficacité A_t croissent à des taux constants n et g. Le taux d'épargne s est exogène et le capital se déprécie au taux δ.

On note $k_t = K_t/(A_tL_t)$ et $y_t = Y_t/(A_tL_t)$ les grandeurs par unité de travail efficace.

1. Montrez que y_t se met sous la forme $f(k_t)$. Écrire l'équation d'évolution de k_t.
2. Déduisez-en l'équation vérifiée par la valeur stationnaire k^* du stock de capital effectif. Montrer graphiquement que l'état stationnaire est stable.
3. Déterminez, à l'état stationnaire, le taux de croissance de la production et de la production par travailleur. Quel est l'impact d'une hausse du taux d'épargne sur la croissance ?
4. On dit que le taux d'épargne satisfait la règle d'or lorsqu'il maximise la consommation par unité de travail efficace. Écrivez l'équation satisfaite par s_{or}. Calculez le taux d'intérêt réel lorsque $s = s_{\text{or}}$, sous l'hypothèse supplémentaire de concurrence parfaite.
5. On dit que l'économie est dynamiquement inefficace si une modification du taux d'épargne peut améliorer la consommation par tête à toutes les périodes. Une économie qui épargne trop ($s > s_{\text{or}}$) est-elle dynamiquement inefficace ? et une économie qui n'épargne pas assez ?
6. Calculez k^* et y^* dans le cas d'une fonction de production Cobb-Douglas

   $$Y_t = K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

   Ecrivez le logarithme de la production par tête à une date t en fonction des paramètres du modèle, en supposant que l'économie est dans son état stationnaire depuis la date initiale $t = 0$. Déterminez la répartition de la valeur ajoutée entre rémunération du travail et du capital.
7. Le tableau 2 rapporte les résultats de l'estimation de l'équation économétrique :

   $$\ln(Y_i/L_i) = a + b[\ln s_i - \ln(n_i + g + \delta)] + \varepsilon_i$$

   sur un ensemble de pays i en 1985. Le modèle permet-il de rendre compte des écarts de niveaux de vie entre pays ?

Dependant variable: log GDP per working-age pearson in 1985			
Sample:	Non-oil	Intermediate	OECD
Observations:	98	75	22
CONSTANT	6.87	7.10	8.62
	0.12	(0.15)	(0.53)
$\ln(I/GDP) - \ln(n+g+\delta)$	1.48	1.43	0.56
	(0.12)	(0.14)	(0.36)
$\overline{R}^2$	0.59	0.59	0.06
Implied α	0.60	0.59	0.36
	(0.02)	(0.02)	(0.15)

Note. Standard errors are in parentheses. The investment and population growth rates are averages for the period 1960-1985. $(g+\delta)$ is assumed to be 0.05.

TABLEAU 2
Estimation du modèle de Solow

Éléments de correction

1. La production effective est :

$$y_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{F(K_t, A_t L_t)}{A_t L_t} = F(k_t, 1) \equiv f(k_t)$$

avec $f' > 0$ et $f'' < 0$. En prenant la dérivée logarithmique du stock de capital effectif, on obtient :

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} - \frac{\dot{A}_t}{A_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} - g - n.$$

En outre, l'équation d'évolution du stock de capital est :

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t,$$

soit

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = s\frac{Y_t}{K_t} - \delta = s\frac{f(k_t)}{k_t} - \delta.$$

Finalement,

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - (\delta + g + n)k_t.$$

Le stock de capital effectif est augmenté de l'investissement (égal à l'épargne), réduit par sa dépréciation et par l'augmentation de la quantité de travail efficace (terme $g+n$, car à quantité de capital donnée, la quantité de capital effectif diminue au fur et à mesure que At et L_t augmentent).

2. L'état est dit stationnaire lorsque les variables par unité de travail efficace sont constantes au cours du temps. En particulier, $\dot{k}_t = 0$ implique :

$$sf(k^*) = (\delta + g + n)k^*.$$

3. La production effective à l'équilibre stationnaire est constante : $y_t = f(k^*) \equiv y^*$. Le taux de croissance de la production par tête $Y_t/L_t = A_t y_t$ est donc égal au seul progrès technique g. La production totale $Y_t = A_t L_t y_t$ croît quant à elle grâce au progrès technique et à l'augmentation de la quantité de travail au taux $g+n$. Ainsi, dans ce modèle, la croissance du niveau de vie provient uniquement du progrès technologique, qui est lui-même exogène.

   Les taux de croissance ne dépendent pas de s. En revanche, le niveau de la production (ou de la production par tête, ou par unité de travail efficace) dépend positivement de s. Un relèvement du taux d'épargne conduit à court terme à une croissance plus élevée pour atteindre le nouvel état stationnaire. À long terme, une fois le nouvel état stationnaire atteint, le taux de croissance revient à son niveau initial. Notez le lien avec l'URSS dans les années 1950 et les tigres asiatiques dans les années 1990.

4. Une forte accumulation de capital permet à terme de produire beaucoup, et donc de consommer beaucoup. Mais il faut consacrer beaucoup de ressources pour maintenir un niveau élevé de capital par unité de travail efficace. Le taux d'épargne optimal arbitre entre ces deux effets opposés, il maximise :

$$c^*(s) = (1-s)f(k^*(s)) = f(k^*(s)) - (\delta + g + n)k^*(s).$$

   La condition du premier ordre par rapport à s s'écrit :

$$\frac{\partial k^*}{\partial s}[f'^*(s_{\text{or}})) - (\delta + g + n)] = 0,$$

   ce qui donne

$$f'^*(s_{\text{or}})) = \delta + g + n.$$

   Le profit de l'entreprise représentative est :

$$F(K_t, A_t L_t) - \delta K_t - r_t K_t - w_t L_t.$$

   Sous l'hypothèse de concurrence parfaite, l'entreprise considère les prix comme donnés et la condition du premier ordre par rapport à K_t est :

$$r_t + \delta = F_K(K_t, A_t L_t) = f'(k_t).$$

   Donc, à la règle d'or, on a $r = g + n$.

5. Une économie qui épargne trop a un stock de capital effectif supérieur à $k^*(s_{\text{or}})$. En réduisant le stock de (en consommant du) capital pour revenir à $k^*(s_{\text{or}})$, elle augmente sa consommation pendant l'ajustement, ainsi que sa consommation après ajustement par définition de s_{or}. Une économie qui épargne trop est donc

dynamiquement inefficace. Ce n'est pas le cas si le niveau d'épargne initial est trop faible. Dans ce cas, accroître la consommation dans les périodes ultérieures nécessite de commencer par réduire la consommation pour investir davantage et augmenter le stock de capital.

6. Avec une fonction Cobb-Douglas, on a $f(k_t) = k_t^{\alpha}$. On obtient alors :

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

et

$$y^* = \left(\frac{s}{\delta + g + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Sur le sentier stationnaire, la production par travailleur vaut :

$$\frac{Y_t}{L_t} = A_t y_t = A_0 e^{gt} y^*.$$

En passant au logarithme, on obtient :

$$\ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right) = \ln(A_0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta).$$

Enfin, la part de la rémunération du capital dans la valeur ajoutée est :

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \frac{f'(k_t)k_t}{f(k_t)} = \alpha.$$

Comme le profit est nul, la part de la rémunération du travail dans la valeur ajoutée est $1-\alpha$.

7. Le coefficient est du signe attendu et il est significatif, sauf pour l'OCDE seule : un R^2 ajusté de 59 % est plutôt bon, mais pas un R^2 de 6 %. Concentrons-nous donc plutôt sur les deux premières colonnes. Le rapport $\alpha/(1-\alpha) = 1{,}48$ implique que $\alpha = 0{,}60$. Ce n'est pas cohérent avec l'observation que la part de la rémunération du capital dans la valeur ajoutée, égale à α, est de l'ordre de 1/3. Cela signifie que les différences de taux d'épargne et de taux de croissance démographique entre pays ne parviennent pas à expliquer la totalité des différences de niveaux de vie entre pays. Intuitivement, il faudrait que le capital compte pour 60 % de la valeur ajoutée pour que les différences du rythme d'accumulation du capital entre pays soient en mesure de générer les écarts de richesse observés dans la réalité ; or le capital ne compte que pour 1/3 de la valeur ajoutée.

6. REPÈRES BIBLIOGRAPHIQUES

Le manuel de Barro et Sala-i-Martin (2003) est une très bonne référence : les chapitres 1, 10 et 12 couvrent la plupart des points abordés dans ce chapitre.

CHAPITRE 3

Une perspective intergénérationnelle

1. INTRODUCTION

La sécurité sociale a été mise en place en France à la Libération. Son architecture, associée au nom de Pierre Laroque, emprunte aux deux principaux modèles alors existants : le modèle allemand, créé à la fin du XIX^{e} siècle par la Prusse de Bismarck, et le modèle anglais, contemporain du système français, et s'inspirant du Plan Beveridge de 1942. Dans la logique bismarckienne, seuls ceux qui ont cotisé (et leurs ayants droit) peuvent bénéficier d'une couverture sociale, les prestations qu'ils reçoivent sont en général proportionnelles à leurs cotisations (les cotisations sont des prélèvements affectés à la protection sociale), les cotisations constituent la principale source de financement des prestations sociales, et la gestion du système est assurée de façon corporatiste (c'est-à-dire par les intéressés eux-mêmes). Au contraire, dans la logique beveridgienne, chacun est susceptible de bénéficier du système de protection sociale, qu'il ait contribué ou non à son financement. Pour cette raison, le financement est assuré pour l'essentiel par l'impôt (un prélèvement qui n'est pas nécessairement affecté à la protection sociale) et la plupart des prestations versées sont forfaitaires ; la gestion du dispositif est confiée à l'État.

La sécurité sociale française est composée de trois grands piliers définis par le type de risque qu'ils traitent : la vieillesse, la santé et la famille. Le travail, notamment l'indemnisation du chômage, ne relève pas à strictement parler de la sécurité sociale. Les prestations sociales versées au titre du premier pilier, la vieillesse, s'élèvent à 13 % du PIB (environ 200 milliards d'euros) ; 10 % du PIB pour la santé, et 3 % pour la famille.

On s'intéressera dans ce qui suit à la question des retraites, qui relèvent du pilier vieillesse. Le système de retraite français est un système par répartition, dans lequel les prestations sont financées par des prélèvements qui leur sont contemporains. En ce sens, il se rapproche plutôt de la conception beveridgienne. Néanmoins, jusqu'à

très récemment, la part de l'impôt et des transferts publics dans le financement était pratiquement négligeable, les cotisations assurant le financement de la protection sociale dans son ensemble, les pensions versées étant proportionnelles aux revenus d'activité et à la durée de cotisation, ce qui nous rapprocherait du système bismarkien.

En apparence, l'organisation de la branche vieillesse en de très nombreux régimes (plus de 500) semble renforcer son caractère bismarkien. Toutefois, en pratique, les deux principes de « solidarité interprofessionnelle » (qui autorise le financement d'un régime par des cotisations relevant d'un autre régime) et de « solidarité nationale » (qui autorise les transferts entre le privé et le public) l'atténuent fortement. En outre, de nombreux régimes sont « alignés » les uns sur les autres, ce qui fait qu'au final trois régimes prédominent. D'abord, le régime général, créé en 1947, qui concerne les (anciens) salariés du secteur privé et dont relèvent 8,5 millions de personnes, qui fonctionne selon le principe de prestation définie (les prestations sont calculées en proportion d'un salaire de référence et de la durée de cotisation : lorsque cette durée est (supérieure ou) égale à une durée prédéfinie, aujourd'hui 40 ans, la retraite est versée à taux plein, en général 50 % du salaire de référence). Ensuite, les régimes complémentaires, qui sont obligatoires pour tous les salariés depuis 1972, et qui complètent les retraites versées selon le principe de cotisation définie, et non plus de prestation définie. Enfin, les régimes particuliers ou spéciaux, qui préexistaient lors de la création de la sécurité sociale, concernent les salariés de la fonction publique et des grandes entreprises nationales.

Les projections démographiques laissent craindre des difficultés importantes pour le régime de retraite par répartition, et ont motivé trois grandes réformes, la première en 1993 sous le gouvernement Balladur, la deuxième en 2003 sous le gouvernement Raffarin, et la dernière en 2008 sous le gouvernement Fillon.

Que nous disent ces projections ? La France comprend aujourd'hui près de 61 millions de personnes. Sous l'effet d'une fécondité relativement élevée (1,9 enfant par femme, alors que ce taux n'est que de 1,3 en Allemagne, en Italie ou en Espagne), d'un solde migratoire positif (de l'ordre de 100 000 personnes par an) et d'une hausse de l'espérance de vie (qui serait en 2050 de 83 ans pour un homme, et de 89 pour une femme), un simple prolongement de la tendance actuelle implique que la population française atteindrait 70 millions d'individus en 2050 mais qu'elle aurait vieilli : 32 % de la population aurait alors plus de 60 ans, contre 21 % aujourd'hui ; et 46 % de la population aurait entre 20 et 49 ans, contre 54 % aujourd'hui.

Les difficultés que pourrait rencontrer notre système de retraite ne dépendent toutefois qu'indirectement de la structure par âge de la population, au travers du rapport entre les inactifs de plus de 60 ans et les actifs, le ratio de dépendance. Or, si l'on prévoit une hausse de l'activité chez les plus de 60 ans sous l'effet des deux réformes du système de retraite de 1993 et de 2003, et aussi sous l'effet de l'allongement de la durée des études (parce qu'elle retarde l'entrée dans l'activité), la hausse de l'espérance de vie et l'allongement de la durée des études à nouveau, qui vient cette fois réduire le nombre d'actifs dans la classe des 20-59 ans, conduisent à un ratio de dépendance de l'ordre de 0,7 en 2050 alors qu'il n'est que de 0,45 aujourd'hui ; alternativement, il n'y aurait plus que 1,4 actif par inactif de plus de 60 ans en 2050, contre 2,2 en 2005.

La réforme de 1993 concernait le régime général, et a prévu une élevation progressive de la durée de cotisation de 37,5 ans à 40 ans pour percevoir une retraite à taux plein. Dans le même temps, le salaire de référence, qui était calculé sur les 10 meilleures années l'a été sur les 25 meilleures, ce qui conduit à réduire mécaniquement le taux de remplacement des revenus d'activité sur la vie. Enfin, les cotisations ont été augmentées, et les pensions réduites, dans les régimes complémentaires.

La réforme de 2003, se recommandant du rapport Charpin de 1999, a aligné les retraites de la fonction publique sur le régime général, et a modifié le schéma de transfert pour accroître les incitations à cotiser plus longtemps (au travers de ce que l'on appelle des surcotes et des décotes).

La réforme des régimes spéciaux est entrée en vigueur le 1er juillet 2008. Elle prévoit que ces régimes vont se rapprocher des deux autres (régime général et fonction publique), en termes de durée de cotisation notamment.

Ces réformes semblent d'abord affirmer le maintien du principe de répartition mais, en même temps, en durcissant les conditions d'accès à une retraite à taux plein et en réduisant les taux de remplacement, elles encouragent les individus à effectuer par eux-même un effort d'épargne supplémentaire. Le système se tournerait alors vers un régime de retraite par capitalisation.

Un débat entre les partisans et les détracteurs de chacune de ces deux alternatives s'est ouvert. Un argument d'équité tendrait sans doute à s'opposer à la capitalisation, pour éviter la reproduction des inégalités entre actifs. Mais un argument d'efficacité nous ferait plutôt pencher vers la capitalisation. En effet, certains pensent qu'une hausse de l'épargne par tête conduirait à une hausse du stock de capital par tête, de la production et de la consommation par tête. En outre, ils s'appuient sur la comparaison entre le taux de rendement de l'épargne et le taux de croissance démographique pour défendre l'idée que les ménages eux-mêmes gagneraient à terme à une réforme. Pour autant, la question de la transition de la répartition vers la capitalisation, lésant la génération d'actifs présente au moment la réforme est mise en œuvre, demeure.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la validité de l'argument d'efficacité. Nous utiliserons pour cela une version simple du modèle à générations imbriquées introduite par Diamond (1965). Nous répondrons en particulier aux trois questions suivantes :

1. Quels sont les effets du système de retraite sur l'accumulation du capital ?
2. Quel lien unit l'accumulation du capital et le bien-être ?
3. Est-il possible réformer le système de retraite sans sacrifier les premières générations de cotisants ?

2. LE MODÈLE À DEUX PÉRIODES

Considérons un individu qui naît à la date t et vit durant les périodes t et $t+1$. Durant sa première période de vie, lorsqu'il est jeune, il offre une unité de travail de façon inélastique, perçoit le salaire w_t et consomme c_{1t} biens. On notera $s_t = w_t - c_{1t}$; il s'agit d'une épargne si $s_t > 0$, et d'une dette si $s_t < 0$.

Durant sa seconde période de vie, il est vieux et consomme c_{2t+1} et perçoit le revenu de son épargne $(1+r_{t+1})s_t$; si cette quantité est négative, il rembourse sa dette. Ici, r_{t+1} représente le taux d'intérêt réel en vigueur en $t+1$, et il est déterminé à cette date. Cet individu doit cependant choisir sa consommation de première période et son épargne avant d'observer ce taux. En t, il doit donc l'anticiper. On supposera pour l'instant que les anticipations sont exactes ; on dit qu'elles sont « parfaites ». Cf. chapitre 7 pour une discussion et un relâchement de cette hypothèse.

2.1. Les contraintes budgétaires

Les deux contraintes budgétaires auxquelles un agent jeune fait face à la date t s'écrivent :

$$c_{1t} + s_t \leqslant w_t \tag{3.1}$$

et

$$c_{2t+1} \leqslant (1 + r_{t+1})s_t, \tag{3.2}$$

avec $c_{1t} \geqslant 0$ et $c_{2t+1} \geqslant 0$. En l'absence de contrainte de financement qui interdirait par exemple à chaque jeune de s'endetter (on imposerait alors la contrainte supplémentaire $s_t \geqslant 0$ en plus de (3.1) et de (3.2)), ces deux inégalités peuvent être réécrites sous la forme d'une seule contrainte, la « contrainte budgétaire intertemporelle », qui s'obtient en éliminant s_t de (3.1) et de (3.2) :

$$c_{1t} + \frac{1}{1 + r_{t+1}} c_{2t+1} \leqslant w_t. \tag{3.3}$$

Le rapport $1/(1 + r_{t+1})$ apparaît comme le prix relatif (anticipé) du bien consommé en seconde période de vie, exprimé en termes du bien consommé en première période de vie. Pour obtenir une unité supplémentaire de bien en $t+1$, un individu né en t doit en effet renoncer à consommer $1/(1 + r_{t+1})$ biens en t ; on impose $1 + r_{t+1} \geqslant 0$. Le seul revenu intertemporel dont il dispose est son revenu d'activité w_t (il est lui aussi exprimé en bien consommé en première période de vie).

2.2. L'optimum individuel

Les préférences d'un invidu qui naît en t sont supposées représentées par la fonction d'utilité

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}), \tag{3.4}$$

où u est une fonction croissante et concave, et $\beta \geqslant 0$ est le « facteur d'escompte ». Lorsque $\beta \leqslant 1$, on dit qu'il existe une « préférence pour le présent » ; on pose parfois $\beta = 1/(1 + \theta)$, où θ $(\theta \geqslant 0)$ est le « taux de préférence pour le présent ». La formulation (3.4) revient à faire deux hypothèses importantes. D'une part, le bien-être retiré par la consommation lors d'une période ne dépend pas de la consommation lors de l'autre période : ce n'est pas parce que l'agent a consommé beaucoup durant sa jeunesse qu'il se contentera de peu durant sa vieillesse, ou bien qu'il se sera habitué à une consommation élevée qui le laisserait insatisfait s'il consommait durant sa vieillesse

moins que durant sa jeunesse. D'autre part, la fonction $u(\cdot)$ est la même lors des deux périodes : le fait d'être jeune ou vieux n'influence pas directement le plaisir retiré de la consommation. Ces deux hypothèses sont sans doute irréalistes. On pourrait en général les lever, au prix d'une lourdeur calculatoire, sans affecter réellement la nature des résultats que nous allons présenter dans ce chapitre. Toutefois, lorsque l'on s'intéressera par la suite à des questions de politique économique, ces hypothèses ne seront pas toujours anodines : par exemple, l'efficacité de la politique monétaire est affectée par la prise en compte d'un effet d'accoutumance, la « formation d'habitudes ».

Le problème que doit résoudre à la date t un individu né à cette date consiste à choisir un plan de consommation (c_{1t}, c_{2t+1}) qui maximise (3.4) sous les deux contraintes budgétaires (3.1) et (3.2), et sous les deux contraintes additionnelles $c_{1t} \geqslant 0$ et $c_{2t+1} \geqslant 0$.

Nous supposerons que l'optimum est intérieur ; il est alors unique et il est tel que le panier (c_{1t}, c_{2t+1}) satisfait la condition du premier ordre

$$u'(c_{1t}) - \beta(1 + r_{t+1})u'(c_{2t+1}) = 0, \tag{3.5}$$

avec

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t - c_{1t}). \tag{3.6}$$

L'épargne qui en résulte est $w_t - c_{1t}$. La condition (3.5) a une interprétation marginaliste simple : en renonçant à consommer une unité de bien lorsque l'on est jeune, on perd $u'(c_{1t})$ unité d'utilité, mais on obtient $(1+r_{t+1})$ unités de revenu supplémentaires une fois vieux, donc le même nombre de biens de consommation supplémentaires lors de cette période, et chaque bien supplémentaire étant valorisé (du point de vue de la première période) à $\beta u'(c_{2t+1})$, le gain d'utilité est bien $\beta(1 + r_{t+1})u'(c_{2t+1})$.

Soient $c_1(w_t, r_{t+1})$, $c_2(w_t, r_{t+1})$ les solutions de ce problème, et $s_t = s(w_t, r_{t+1}) \equiv w_t - c_1(w_t, r_{t+1})$ l'épargne correspondante. Dans ce qui suit, nous supposerons que l'épargne choisie reste positive ; ce que l'on appelle la « configuration de Samuelson ». Cf. chapitre 4 pour une étude plus générale.

2.3. Salaire, consommation et épargne

Une hausse du salaire s'accompagne uniquement d'un effet revenu. Il est facile de vérifier, en différentiant (3.5) après avoir remplacé c_{2t+1} par son expression, déduite de (3.6), que :

$$\frac{dc_1}{dw_t} = \frac{\beta(1 + r_{t+1})^2 u''(c_{2t+1})}{u''(c_{1t}) + \beta(1 + r_{t+1})^2 u''(c_{2t+1})} \in [0, 1].$$

On déduit alors de (3.6) que :

$$\frac{1}{1 + r_{t+1}} \frac{dc_2}{dw_t} = 1 - \frac{dc_1}{dw_t} \geqslant 0.$$

La concavité de u (et la séparabilité de la fonction d'utilité) implique donc que les deux biens de consommation sont normaux.

En utilisant (3.1), une fois saturée, on obtient aussi :

$$\frac{ds_t}{dw_t} = 1 - \frac{dc_1}{dw_t} \in [0,1].$$

L'épargne est croissante avec le salaire.

2.4. Épargne et taux d'intérêt

L'effet d'une hausse du taux d'intérêt (anticipé) a des effets ambigus sur les comportements de consommation et d'épargne. La contrainte (3.3) permet en effet d'assimiler une hausse du taux d'intérêt à une baisse du prix relatif du bien consommé en seconde période de vie : elle s'accompagne donc d'un effet de substitution et d'un effet de revenu susceptibles de s'opposer.

Pour distinguer ces deux effets, notons h_1 et h_2 les demandes compensées (hicksiennes) de biens de consommation. Lorsque le taux d'intérêt s'élève, ces demandes s'obtiennent en ajustant le revenu d'un montant dR permettant à l'individu de maintenir son niveau d'utilité initial. Une application du lemme de Shephard donne immédiatement $(1+r_{t+1})^2 dR = -c_{2t+1} dr_{t+1}$ (lorsque le taux d'intérêt s'élève, le prix du bien de consommation de seconde période de vie baisse, ce qui permet à l'individu d'accroître son niveau d'utilité (indirecte), de sorte qu'une baisse du revenu est nécessaire pour que l'utilité (indirecte) reste à son niveau initial)[1]. Les équations de Slutsky s'écrivent dans ce cas :

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}} = \underset{(-)}{\frac{\partial h_1}{\partial r_{t+1}}} + \frac{w_t - c_{1t}}{1+r_{t+1}} \frac{\partial c_1}{\partial w_t},$$

et

$$\frac{\partial c_2}{\partial r_{t+1}} = \underset{(+)}{\frac{\partial h_2}{\partial r_{t+1}}} + \frac{w_t - c_{1t}}{1+r_{t+1}} \frac{\partial c_2}{\partial w_t}.$$

Une hausse du taux d'intérêt, en augmentant le revenu de l'individu (épargnant par hypothèse), l'incite à consommer plus de chacun des deux biens (effet de revenu). Et, en réduisant le prix relatif du bien de seconde période de vie, cela l'incite à consommer plus de ce bien et à diminuer sa consommation de biens en première période (effet de substitution) : $\partial h_1/\partial r_{t+1} < 0$ et $\partial h_2/\partial r_{t+1} > 0$. Au total, la consommation (prévue) augmente toujours en seconde période. Mais la réaction de la consommation en première période reste incertaine : elle diminue avec le taux d'intérêt si l'effet de substitution est dominant, et elle augmente si c'est l'effet de revenu qui est dominant.

1. Soit $e(1/(1+r), w, U)$ la dépense nécessaire pour obtenir le niveau d'utilité U lorsque le taux d'intérêt est r et le salaire w. Initialement, $e(1/(1+r_{t+1}), w_t, U) = w_t$; finalement, $e(1/(1+r_{t+1}) + d(1/(1+r_{t+1}), w_t, U) = w_t + dR$ par définition de dR. En faisant la différence membre à membre, on a au premier ordre :

$$\frac{\partial e}{\partial(1/(1+r_{t+1}))} d\left(\frac{1}{1+r_{t+1}}\right) = dR.$$

Le résultat suit du lemme de Shephard, $\partial e/\partial(1/(1+r_{t+1})) = c_{2t+1}$ (où e est évaluée dans la situation initiale).

En utilisant (3.1), une fois saturée, on a :

$$\frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} = -\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}}.$$

La réaction de l'épargne est donc elle aussi incertaine ; une hausse du taux d'intérêt conduit à une hausse de l'épargne si et seulement si la consommation d'un individu jeune baisse quand il anticipe une hausse du taux d'intérêt. Ainsi, l'épargne augmente avec le taux d'intérêt si l'effet de substitution est dominant, et elle diminue sinon[1].

Ces propriétés de monotonie (de dominance de l'effet de subsitution sur l'effet de revenu) dépendent en fait du degré de concavité de la fonction u. En différentiant (3.5), après avoir à nouveau remplacé c_{2t+1} par son expression, déduite de (3.6), on obtient :

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}} = \beta \frac{u'(c_{2t+1}) + c_{2t+1}u''(c_{2t+1})}{u''(c_{1t}) + \beta(1+r_{t+1})^2 u''(c_{2t+1})}.$$

Le dénominateur de cette expression est négatif puisque $u''(\cdot) < 0$. On a donc :

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}} < 0 \Leftrightarrow 1 > -\frac{c_{2t+1}u''(c_{2t+1})}{u'(c_{2t+1})}.$$

En notant $\sigma(c_{2t+1}) = -u'(c_{2t+1})/c_{2t+1}u''(c_{2t+1}) > 0$ pour toute consommation c_{2t+1} finie, on a finalement :

$$\frac{\partial c_1}{\partial r_{t+1}} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} > 0 \Leftrightarrow \sigma(c_{2t+1}) > 1.$$

Le terme $1/\sigma(c_{2t+1})$ représente l'élasticité de l'utilité marginale par rapport à la consommation ; c'est aussi le coefficient relatif d'aversion pour le risque. Il nous donne par conséquent une mesure de la concavité de la fonction d'utilité. Mais on privilégie souvent une autre interprétation : $\sigma(c_{2t+1})$ peut aussi être vue comme une élasticité de substitution. Considérons l'élasticité de substitution entre deux niveaux de consommation c_{2t+1} et $\tilde{c}_{2t+1}$ en seconde période. Puisque l'utilité marginale $u'(c_{2t+1})$ est proportionnelle au prix du bien de seconde période lorsqu'il consommé en quantité c_{2t+1} à l'optimum, l'élasticité de substitution est (par définition) :

$$\frac{d\log(\tilde{c}_{2t+1}/c_{2t+1})}{d\log(u'(\tilde{c}_{2t+1})/u'(c_{2t+1}))}.$$

Elle est dite instantanée lorsque $\tilde{c}_{2t+1} = c_{2t+1} + dc_{2t+1}$ avec $dc_{2t+1} \to 0$. Au premier ordre, elle est alors égale à $\sigma(c_{2t+1})$ (tel sera le cas en général si la durée d'une période est suffisamment courte, dans le cas limite sur un intervalle de temps de longueur dt).

Il est simple d'avoir une intuition dans le cas où la fonction d'utilité u est quasiment linéaire (u'' est proche de 0, ou bien encore $\sigma(\cdot)$ est grand). La fonction d'utilité intertemporelle est alors proche de la fonction $c_{1t} + \beta c_{2t+1}$: un agent jeune peut substituer parfaitement la consommation future à la consommation courante. Si, dans la

1. Lorsque l'individu veut s'endetter, $s_t = w_t - c_{1t} < 0$, on a $\partial c_1/\partial r_{t+1} < 0$: l'effet de revenu et de substitution se renforcent l'un l'autre. Une baisse du taux d'intérêt conduit alors à une hausse de l'endettement souhaité.

situation initiale, l'agent consomme lors des deux périodes ($(1+r_{t+1})\beta$ est proche de 1), une petite hausse du taux d'intérêt réel renchérit le bien 1 par rapport au bien 2 et provoque un report de la consommation sur le bien 2 ; à la limite, l'intégralité du revenu sera consacrée au bien 2. La consommation de bien 1 diminue et l'épargne augmente.

2.5. Le comportement d'un agent jeune

Nous pouvons maintenant reprendre brièvement ce que nous savons du comportement d'un agent jeune qui planifie sa consommation et son épargne. Lorsque la fonction u est concave et satisfait les conditions d'Inada, il existe un unique optimum intérieur $(c_1(w_t, r_{t+1}), c_2(w_t, r_{t+1}))$ défini par (3.1), (3.2) et (3.5). Les consommations c_{1t} et c_{2t+1} sont croissantes avec w_t ; lorsque $s_t > 0$, c_{1t} est croissante avec r_{t+1} si et seulement si l'élasticité de substitution instantanée $\sigma(c_{2t+1})$ de seconde période est inférieure à 1 ; et c_{2t+1} est toujours croissante avec r_{t+1}. La fonction d'épargne $s_t = s(w_t, r_{t+1})$ qui en résulte, telle que

$$u'(w_t - s_t) + \beta(1+r_{t+1})u'((1+r_{t+1})s_t) = 0,$$

est croissante avec w_t (mais moins que proportionnellement), et elle est croissante avec r_{t+1} si et seulement si l'élasticité de substitution instantanée $\sigma(c_{2t+1})$ est supérieure à 1.

3. DES GÉNÉRATIONS IMBRIQUÉES

On reprend dans cette section le modèle de Diamond (1965). Les individus vivent deux périodes consécutives mais une nouvelle génération apparaît lors de chaque période. À la date t, il y N_t nouveaux individus qui naissent. Aussi, à chaque instant, coexistent deux générations différentes. L'une est composée d'agents jeunes dont le comportement est analogue à celui que nous venons de décrire dans la section précédente. L'autre est composée d'agents en seconde période de vie. Ces deux générations font face à une entreprise active indéfiniment. Il n'y a pas de monnaie, mais il est possible de transférer de la richesse d'une période sur l'autre en utilisant une technologie qui transforme des biens de consommation en capital. Pour cette raison, toutes les grandeurs exprimées le sont en termes réels. Cf. le chapitre 6 pour l'introduction de la monnaie.

3.1. Les individus vieux

À la date t, il y a N_{t-1} individus vieux. Chacun a épargné $s(w_{t-1}, r_t)$ lors de la période précédente et consomme donc $c_{2t} = (1+r_t)s(w_{t-1}, r_t)$. En d'autres termes, l'agent vieux consomme son épargne (son patrimoine) et le revenu (de son épargne).

3.2. Les entreprises

C'est du côté des ménages que se trouve la nouveauté : leur comportement de consommation et d'épargne ne se conforme pas nécessairement aux préceptes keynésiens, comme c'était encore le cas dans les modèles de croissance keynésiens et le modèle de croissance néo-classique de Solow du chapitre précédent.

Du côté des entreprises, rien n'est changé par rapport au chapitre précédent. Pour simplifier, il n'y a qu'une entreprise, et elle se comporte de façon concurrentielle. À la date t, elle produit $F(K_{t-1}, L_t)$ en utilisant K_{t-1} unités de capital et L_t unités de travail ; le fait que le stock de capital soit reporté avec l'indice $t-1$ indique que la production de la date t se fait à partir du stock de capital existant à la date t, mais que ce stock est hérité de la période précédente, $t-1$.

On supposera que $F(K_{t-1}, L_t)$ est une fonction de production néo-classique.

À la date t, l'entreprise demande K_{t-1} unités de capital, qu'elle paye au prix r_t, et elle demande L_t unités de travail. En l'absence de dépréciation du capital, le profit s'écrit $F(K_{t-1}, L_t) + K_{t-1} - (1+r_t)K_{t-1} - w_t L_t$; les K_{t-1} unités de capital ont été données (louées) puis rendues. Sous l'hypothèse de concurrence pure et parfaite, chaque facteur est rémunéré à sa productivité marginale :

$$F_K(K_{t-1}, L_t) = r_t, \tag{3.7}$$

$$F_N(K_{t-1}, L_t) = w_t. \tag{3.8}$$

L'hypothèse faite sur les rendements d'échelle implique que, étant donnés les prix des facteurs (r_t, w_t), si une paire (K_{t-1}, L_t) est solution de (3.7) et (3.8), alors il est possible d'accroître le profit de l'entreprise dès que $F(K_{t-1}, L_t) - r_t K_{t-1} - w_t L_t \neq 0$. On imposera donc que les prix des facteurs satisfont en outre

$$F(K_{t-1}, L_t) = r_t K_{t-1} + w_t L_t. \tag{3.9}$$

Il suit de la propriété d'homogénéité de degré 1 de la fonction F que (3.7) et (3.9) impliquent (3.8). Le comportement de l'entreprise peut donc être entièrement décrit par la fonction de production, (3.7) et (3.9).

Il est commode de réécrire les deux conditions (3.7) et (3.9) en fonction du stock de capital par tête $k_t = K_{t-1}/L_t$ et de la fonction de production par tête $f(k_t) = F(K_{t-1}, L_t)/L_t = F(K_{t-1}/L_t, 1)$:

$$r_t = f'(k_t) \stackrel{\text{def}}{=} r(k_t),$$

$$w_t = f(k_t) - r(k_t)k_t \stackrel{\text{def}}{=} w(k_t).$$

Notons que $r(\cdot)$ est une fonction décroissante avec k_t et que $w(\cdot)$ est une fonction croissante avec k_t (puisque $f'' < 0$, la productivité marginale du capital par tête est supérieure à sa productivité moyenne) : une hausse du stock de capital par tête, c'est-à-dire une hausse du stock de capital par rapport au travail, conduit à une baisse de la productivité marginale du capital et à une hausse de la productivité marginale du travail, de sorte que le taux d'intérêt réel doit baisser et le salaire réel doit augmenter.

On impose que f vérifie les conditions d'Inada :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \infty, \quad \text{et } f'(\infty) = 0.$$

4. L'ÉQUILIBRE INTERTEMPOREL

À la date t, trois marchés sont ouverts : le marché du travail, le marché du capital et un marché pour les biens.

L'offre agrégée de travail est égale à N_t (chaque individu jeune offre une unité de travail de façon inélastique). L'égalité de l'offre et de la demande sur le marché du travail s'écrit donc :

$$N_t = L_t. \tag{3.10}$$

C'est sur le marché du capital que les choses sont un peu différentes de ce qui se passait dans le modèle de croissance néoclassique de Solow. Au début de la période t, il y a K_{t-1} unités de capital. Elles sont possédées par les individus vieux en t (qui les ont acquises en $t-1$). Une fois que la production a eu lieu, et que les facteurs de production ont été rémunérés, les jeunes de t pour le travail qu'ils ont fourni, les vieux de t pour le capital qu'ils ont prêté, les vieux de t n'ont maintenant plus aucune raison de conserver du capital ; ils le consomment intégralement ! À la fin de la période t ne subsiste donc sous forme de capital que l'épargne des jeunes (réalisée sur leurs revenus d'activité), $N_t s_t$. C'est ce stock qui constituera l'offre de capital en $t+1$; les entreprises demandant alors K_t. Le taux d'intérêt de $t+1$, r_{t+1}, sera donc tel que :

$$K_{t-1} + N_t s_t - K_{t-1} = K_t. \tag{3.11}$$

Si l'équilibre sur le marché du capital ne s'écrit pas sous la forme d'une égalité entre l'épargne et l'investissement (l'égalité entre deux flux) mais entre l'épargne et le stock de capital lui-même, c'est que tout se passe comme si la dépréciation du capital était complète, les vieux qui détiennent le stock de capital du début de période le consommant (en le convertissant en biens de consommation).

Par la loi de Walras, les deux contraintes budgétaires (3.1) et (3.2) saturées, la condition de profit nul (3.9) de l'entreprise, et les deux égalités emplois-ressources (3.10) et (3.11) sur le marché du travail et sur le marché du capital doivent impliquer l'égalité emplois-ressources sur le marché des biens. Pour le vérifier, sommons membre à membre

$$N_t c_{1t} + N_t s_t = w_t N_t,$$

$$N_{t-1} c_{2t} = (1 + r_t) N_{t-1} s_{t-1},$$

$$r_t K_{t-1} + w_t N_t = F(K_{t-1}, N_t),$$

et utilisons $N_{t-1} s_{t-1} = K_{t-1}$. On obtient :

$$N_t(c_{1t} + s_t) + N_{t-1} c_{2t} = K_{t-1} + F(K_{t-1}, N_t).$$

La somme de la demande de biens par les individus jeunes en t, $N_t(c_{1t} + s_t)$, et de la demande de biens par les individus vieux en t, $N_{t-1} c_{2t}$ est égale à la quantité totale de

biens disponible en l'absence de dépréciation de capital, $K_{t-1} + F(K_{t-1}, N_t)$. Ou bien encore, en prenant en compte (3.11),

$$F(K_{t-1}, N_t) = N_t c_{1t} + N_{t-1} c_{2t} + K_t - K_{t-1},$$

c'est-à-dire que la valeur ajoutée (le PIB) est égale à la consommation des ménage plus l'investissement des entreprises. On retrouve l'approche du PIB par la demande.

En supposant que la population croît au taux constant n (égal à $N_t - N_{t-1})/N_{t-1}$), il est possible de définir un équilibre de la façon suivante :

Définition 3.1

Un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites est une suite $(k_t, t \geqslant 0)$ *telle que*

$$s(w(k_t), r(k_{t+1})) = (1+n)k_{t+1} \tag{3.12}$$

est satisfaite pour tout $t \geqslant 0$, *étant donné* k_0.

Cet équilibre est défini par une évolution du stock de capital au cours du temps : c'est en ce sens qu'il est intertemporel (ou dynamique). D'autre part, les anticipations des ménages (et de l'entreprise) ont été supposées exactes.

Reprenons brièvement ce qui se passe lors de la période t :

1. Les individus nés en $t-1$ possèdent à la date t un stock de capital K_{t-1}. Face aux prix (r_t, w_t), l'entreprise demande ces K_{t-1} unités de capital et utilise les N_t unités de travail offertes de façon inélastique par les individus nés en t.
2. L'entreprise produit $F(K_{t-1}, N_t)$ biens de consommation. Il y a donc $F(K_{t-1}, N_t) + K_{t-1}$ biens disponibles. Elle rémunère les facteurs de production : elle paye $(1+r_t)K_{t-1}$ aux individus vieux en t, et $w_t N_t$ aux individus jeunes en t.
3. Les individus vieux consomment $N_{t-1}c_{2t} = (1+r_t)K_{t-1}$, et les individus jeunes ont reçu $w_t N_t$ biens. Les jeunes n'en consomment qu'une partie :

   $$N_t c_{1t} = N_t(w_t - s_t).$$

   Puisque $F(K_{t-1}, N_t) = r_t K_{t-1} + w_t N_t$, il reste dans l'économie $N_t s_t$ biens qui constituent le stock de capital K_t disponible à la date suivante, $t+1$. Les marchés seront donc équilibrés à chaque date si $N_t s_t = K_t$.

Pour étudier l'existence d'un tel équilibre, notons d'abord que, si $k_t \to 0$, alors $w_t \to 0$ et $s_t \to 0$, et donc $k_{t+1} \to 0$.

En outre, en différentiant (3.12), on a :

$$s_w(w(k_t), r(k_{t+1}))\, w'(k_t)\, dk_t$$

$$+ s_r(w(k_t), r(k_{t+1}))\, r'(k_{t+1})\, dk_{t+1} = (1+n)\, dk_{t+1} \tag{3.13}$$

On a $s_w(\cdot) > 0$ et $w'(\cdot) > 0$: une hausse du stock k_t conduit à une hausse du salaire et donc à une hausse de l'épargne. Le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe un unique k_{t+1} satisfaisant (3.12) pour tout $k_t \geqslant 0$. La réciproque n'est pas forcément vraie puisque le signe de $s_r(\cdot)$ est ambigu. Si $s_r(\cdot) > 0$, alors comme $r'(\cdot) < 0$, il existe un unique k_t pour tout k_{t+1} (à nouveau, le résultat suit du théorème des fonctions implicites) ; dans ce cas, k_{t+1} est une fonction croissante de k_t.

Intuitivement, lorsque le stock de capital par tête (le rapport capital/travail) est plus élevé lors de la période courante, la productivité marginale du travail augmente, et avec elle le salaire. La hausse du revenu des agents jeunes les incite à épargner plus. Étant donné le stock de capital de la période suivante, il apparaît un excès d'offre de capital. Il faudrait donc que le stock de capital de la période suivante augmente ; mais cette hausse influence le taux d'intérêt réel de la période suivante : il baisse. Si l'épargne baisse quand le taux d'intérêt baisse, l'excès d'offre se résorbe. Sinon, il est possible qu'une baisse du stock de capital lors de la période suivante rééquilibre le marché du capital.

Dans ce chapitre, on ne s'intéressera pas en général aux propriétés dynamiques elles-mêmes, mais on se concentrera sur les équilibres stationnaires.

Définition 3.2

Un équilibre stationnaire est une suite $(k_t = k^*, t \geqslant 0)$ *telle que*

$$s(w(k^*), r(k^*)) = (1+n)k^*,$$

où $k_0 = k^*$ *est donné.*

Pour étudier l'existence d'un tel k^*, on étudie l'existence d'au moins une racine à l'équation $s(w(k), r(k)) - (1+n)k = 0$. Nous avons vu plus haut que $k = 0$ est une racine de cette équation (mais la condition du premier ordre du problème d'un individu jeune n'est pas satisfaite en ce point). Lorsque $k \to +\infty$, $w(k)$ et $r(k)$ sont bornés supérieurement (si f satisfait les conditions d'Inada) de sorte que s est elle aussi bornée supérieurement. Donc, pour $k \to +\infty$, $s(w(k), r(k)) - (1+n)k < 0$. Si $s'(w(0), r(0)) > 1+n$, il existe un nombre impair de racine(s) strictement positive(s) ; sinon, il en existe un nombre pair, éventuellement nul. Il n'est pas possible d'aller plus avant sans spécifier la fonction d'utilité et/ou de production.

Parfois, la stabilité locale de l'équilibre stationnaire permet d'obtenir des propriétés de statique comparées. Nous en avons vu quelques exemples dans le chapitre précédent pour étudier l'incidence de la fiscalité sur le capital. Nous en verrons d'autres exemples dans la section 3. L'équation (3.13) nous renseigne sur la stabilité locale de cet équilibre (dans la dynamique avec prévisions parfaites). Au point $k_t = k_{t+1} = k^*$, elle s'écrit en effet :

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{s_w(w(k^*), r(k^*))w'(k^*)}{(1+n) - s_r(w(k^*), r(k^*))r'(k^*)}.$$

L'équilibre stationnaire (k^*) est localement stable lorsque toute suite (k_t) satisfaisant (3.12), avec k_0 arbitrairement proche de k^*, est telle que $k_t \to k^*$ quand $t \to \infty$. C'est le cas si et seulement si le rapport ci-dessus est compris entre 0 et 1.

Lorsque $s_r > 0$, $dk_{t+1}/dk_t > 0$ à l'équilibre. En outre,

$$0 \leqslant \frac{k_{t+1}}{k_t} \leqslant (1+n)\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{s(w(k_t), r(k_{t+1}))}{k_t} \leqslant \frac{w_t}{k_t} = \frac{f(k_t)}{k_t} - f'(k_t).$$

Les conditions d'Inada impliquent que

$$\lim_{k_t \to +\infty} \left(\frac{f(k_t)}{k_t} - f'(k_t) \right) = 0.$$

Il s'ensuit qu'à l'équilibre, $k_{t+1}/k_t < 1$ pour k_t suffisamment grand. Aussi, s'il existe un/des équilibre(s) stationnaire(s) où $k^* > 0$, certains d'entre eux sont au moins localement stables ; si cet équilibre est unique, il est globalement stable (tel est le cas pour k_2^* sur la figure 1 lorsque la relation entre k_t et k_{t+1} est décrite par la relation en gras plein).

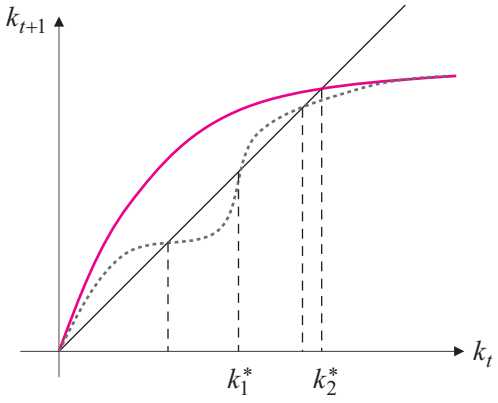


FIGURE 1
Stabilité de l'équilibre stationnaire

Sur la figure 1, la relation entre k_t et k_{t+1} décrite par la courbe en traits pointillés illustre la possibilité qu'existent plusieurs équilibres stationnaires, même si l'effet de substitution est partout dominant ; ici, deux d'entre eux sont localement stables, mais l'équilibre k_1^* ne l'est pas.

5. L'OPTIMALITÉ

5.1. La règle d'or d'accumulation

À l'équilibre, l'égalité emplois-ressources sur le marché des biens s'écrit :

$$N_t c_{1t} + K_t + N_{t-1} c_{2t} = K_{t-1} + F(K_{t-1}, N_t),$$

ou bien encore, par tête d'individu né en t,

$$c_t + (1+n)k_{t+1} = k_t + f(k_t), \tag{3.14}$$

où $c_t = c_{1t} + c_{2t}/(1+n)$ représente la consommation de la période t par tête d'individu né en t. À l'équilibre stationnaire, $k_t = k_{t+1} = k^*$; et l'on a donc $w = w(k^*) = w^*$, $r = r(k^*) = r^*$, ce qui implique que les quantités consommées c_{1t} et c_{2t+1} sont constantes au cours du temps, et ainsi $c_t = c^*$. Soit :

$$c^* + nk^* = f(k^*). \tag{3.15}$$

Il est naturel d'adopter comme premier critère de bien-être le niveau de la « consommation par tête » c^*. Le stock de capital par tête stationnaire k^*_{or} qui maximise la consommation par tête lors de chaque période est tel que :

$$f'(k^*_{\text{or}}) = n. \tag{3.16}$$

On reconnaît l'expression de la *règle d'or* d'accumulation du capital. Si $k^* \neq k^*_{\text{or}}$, il est possible, en modifiant l'accumulation du capital de sorte à maintenir constant le stock de capital par tête au cours du temps (à un niveau différent de k^*) d'accroître la consommation par tête stationnaire.

Dans certains cas, la transition elle-même vers la règle d'or peut être accompagnée d'une hausse de la consommation par tête. Comme dans le chapitre 1, lorsque le capital accumulé est très élevé, sa productivité est faible, de sorte que consommer ce capital aura finalement peu d'effet sur la production. Pour le voir, plaçons-nous à l'équilibre stationnaire initial k^* et imposons à la date t une variation dk^* de ce stock de capital à compter de la date $t+1$. Il suit de (3.14), que[1] :

$$dc_t = -(1+n)dk^*, \tag{3.17}$$

et, pour tout $t' \geqslant t+1$,

$$dc_{t'} = (f'(k^*) - n)dk^*. \tag{3.18}$$

Par (3.17), il est possible d'augmenter le bien-être de tous les individus en t seulement si $dk^* < 0$. Pour $dk^* < 0$, il est possible d'augmenter le bien-être de tous les individus à toutes les dates à compter de $t+1$ si et seulement si $f'(k^*) < n$, ou bien encore, comme $f'(k^*_{\text{or}}) = n$ et $f'' < 0$, si et seulement si $k^* > k^*_{\text{or}}$. En d'autres termes, lorsque $k^* > k^*_{\text{or}}$, une baisse du stock de capital par tête stationnaire conduit à une hausse de la consommation par tête à toutes les dates. Ce régime est dit de sur-accumulation, et il est clairement inefficace au sens de Pareto ; on dit alors que l'économie est « dynamiquement inefficace ».

5.2. L'efficacité dynamique

Dans l'autre configuration, où $k^* < k^*_{\text{or}}$, une hausse du stock de capital par tête permettrait d'augmenter la consommation à long terme, mais la consommation baisserait en t du fait de l'effort d'accumulation nécessaire pour atteindre la règle d'or. Les effets sur le bien-être semblent incertains. Dans le long terme, c'est-à-dire une

1. Attention, en t, le stock de capital par tête courant est donné. Aussi, $dk_t = 0$ et $dk_{t+1} = dk^*$.

fois que l'économie aura achevé sa transition et se retrouvera à l'équilibre stationnaire de la règle d'or, toutes les générations seront mieux (elles pourront consommer plus). Avant d'atteindre cette situation, et en particulier pour ceux qui sont présents au moment où l'on demande un effort d'épargne supplémentaire, les choses sont moins claires que dans le modèle de croissance néo-classique de Solow parce qu'alors coexistent des gens différents. Si l'on choisit de prendre aux vieux une partie des biens qu'ils possèdent (et qu'ils s'apprêtaient à consommer) pour les transformer en capital, les vieux seront pénalisés. Par contre, il ne semble pas impossible de forcer les jeunes à épargner plus que ce qu'ils auraient désiré (étant donné le taux d'intérêt réel qu'ils anticipent), pour accroître le stock de capital et la production lorsqu'ils seront devenus vieux et les compenser à ce moment-là des dommages qu'ils ont subis durant leur jeunesse. Ce n'est en fait pas le cas.

Pour avoir une intuition simple de la condition d'(in)efficacité dynamique de l'équilibre à long terme, considérons juste une économie d'échange. Plus tard, nous reviendrons sur ce point et nous prendrons alors en compte la production. Les dotations des individus sont constantes au cours du temps, disons e_1 et e_2 (on peut prendre $e_1 = w^*$ et $e_2 = 0$). Lorsque le prix relatif du bien 2 en terme de bien 1 est $1/(1+r^*)$, les individus consomment des quantités c_1 et c_2 satisfaisant (si l'optimum est intérieur) l'égalité usuelle entre le taux marginal de substitution et le rapport des prix (des biens au cours du temps) $\beta u'(c_2)/u'(c_1) = 1/(1+r^*)$, par les conditions (nécessaires et suffisantes) du premier ordre du problème d'un agent jeune. Supposons que l'on impose alors une redistribution de la consommation au chapitre de la vie, avec $dc_2 = -\alpha dc_1$. Le bien-être varie de $u'(c_1)dc_1 - \beta u'(c_2)\alpha dc_1$. Il augmente si et seulement si :

$$\left(1-\alpha\frac{\beta u'(c_2)}{u'(c_1)}\right)dc_1 > 0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{\alpha}{1+r^*}\right)dc_1 > 0.$$

Les vieux possédant $N_{t-1}e_2$ et les jeunes $N_t e_1$, si l'on confisque une unité de bien à chaque jeune, on peut distribuer $(1+n)$ biens à chaque vieux. C'est la contrainte de réalisabilité du schéma de redistribution. Pour $\alpha = 1+n$, l'inégalité précédente s'écrit

$$\left(1-\frac{1+n}{1+r^*}\right)dc_1 > 0 \Leftrightarrow (r^*-n)dc_1 > 0.$$

Il serait donc avantageux pour tout individu jeune, de réduire sa consommation en première période pour l'augmenter en seconde période si $n > r^*$, et de faire le contraire si $n < r^*$. Aussi, si l'on prend aux jeunes pour donner aux vieux (lorsque $n > r^*$), les vieux initiaux voient leur bien-être augmenter (on ne leur a rien pris durant leur jeunesse), et les générations suivantes sont mieux également. La solution initiale est donc inefficace socialement. Dans le cas contraire, on devra forcément taxer les vieux initialement : ces derniers voient leur bien-être diminuer, pour augmenter celui des générations suivantes : les vieux initiaux souffrent de la politique, et la situation initiale est efficace.

Remarque 3.1

On considère en général que le taux d'intérêt réel est bien supérieur au taux de croissance de la population ; soit $r > n$, de sorte que l'économie française ne serait pas

dynamiquement inefficace. Prenons comme mesure du taux de croissance démographique le taux de croissance de la production agrégée dans le long terme, disons 0,02. Considérons une fonction de production Cobb-Douglas $y = Ak^{\alpha} - \delta k$ avec $\alpha = 0,3$ et un taux de dépréciation $\delta = 0,15$. Pour un revenu Y égal à la valeur ajoutée des sociétés en 2006, 972 Md€, et un stock de capital K égal à leur stock d'actifs non-financiers la même année, 3 702,6 Md€[1], la condition du premier ordre $\alpha y = (r+\delta)k$ donne un taux d'intérêt $r = 0,1$, bien supérieur à 0,02.

Alternativement, il est facile de vérifier que, avec la même fonction de production, le taux d'épargne s^*_{or} assurant que l'économie se trouvera à long terme à la règle d'or est égal à la part α de la rémunération du capital dans le PIB, soit de l'ordre de 30 % (alors que la propension à consommer est de l'ordre de 80 % du PIB de sorte que l'épargne n'excède pas 20 % du PIB).

6. UNE APPLICATION À LA QUESTION DES RETRAITES

Comme nous allons le voir, le rendement de l'épargne est égal à r lorsque le système de retraite est organisé autour de la capitalisation, et à n lorsqu'il l'est autour de la répartition. Si l'économie française est bien dynamiquement efficace, un passage de la répartition à la capitalisation semble donc bénéfique à long terme. Toutefois, cette assertion néglige l'effet de retour de la réforme sur (1) l'accumulation du capital et (2) le taux d'intérêt. Ces deux points sont examinés à la fin de la section 3.1.

6.1. Retraite et accumulation du capital

Une retraite est résumée ici à une cotisation faite en première période de vie, lorsque l'individu est jeune et travaille, et à une pension reçue en seconde période de vie. Supposons que l'État prélève à la date t un montant v_t à chaque individu né en t (c'est la cotisation vieillesse) et transfère la pension p_t à chaque individu né en $t-1$.

6.1.1. La retraite par capitalisation

Dans un système de retraite par capitalisation, v_t est placée sur le marché du capital et rapporte $(1+r_{t+1})v_t$ en $t+1$; on a donc $p_{t+1} = (1+r_{t+1})v_t$.

Supposons que le prélèvement (la cotisation vieillesse) reste constant au cours du temps : $v_t = v$ pour tout $t \geqslant 0$.

Alors, dans un système de retraite par capitalisation, les contraintes de budget (3.1) et (3.2) deviennent :

$$c_{1t} + s_t + v = w_t$$

et

$$c_{2t+1} = (1+r_{t+1})(s_t + v).$$

Clairement, face à des prix des facteurs (w_t, r_{t+1}), le volume total de l'épargne réelle, $s_t + v$, est le même que dans les sections précédentes. Une hausse de la cotisation v se

1. Compte de patrimoine par secteur institutionnel 4,50 de 2006 ; on néglige les entrepreneurs individuels.

traduit donc par une baisse de même montant de l'épargne volontaire. En ce sens, il y éviction complète de l'épargne volontaire.

L'épargne nette étant égale à $N_t(s_t + v)$, la dynamique d'équilibre (3.12) est :

$$s_t + v = (1+n)k_{t+1}.$$

Dès lors que v est suffisamment petit pour que le montant s_t reste positif (il n'y a pas « d'épargne forcée »), l'offre de capital par tête $s_t + v$ reste la même qu'en l'absence de retraite. Et, par conséquent, le système n'affecte pas l'équilibre. L'interprétation est simple : les individus jeunes font face à deux placements offrant le même rendement et ne font que substituer l'un à l'autre.

6.1.2. La retraite par répartition

Dans un système de retraite par répartition, le prélèvement agrégé $N_t v_t$ est reversé lors de la même période aux individus nés en $t-1$. En supposant que chacun reçoit le même transfert, on a $p_t = N_t v_t / N_{t-1} = (1+n)v_t$. Ainsi, en régime stationnaire, où le taux d'intérêt réel reste constant, le rendement de la capitalisation est plus élevé que celui de la répartition lorsque l'équilibre stationnaire est dynamiquement efficace, $r > n$, c'est-à-dire dans la configuration où une hausse du stock de capital par tête permettrait à long terme d'accroître la consommation.

Dans un système de retraite par répartition, (3.1) et (3.2) deviennent :

$$c_{1t} + s_t + v = w_t$$

et

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t + (1+n)v.$$

Lorsque l'économie se trouve à la règle d'or, le système est équivalent au système par capitalisation. Sinon, les deux placements ont des rendements différents. Dans l'épargne totale $s_t + v$, seule s_t constitue une offre de capital ; la cotisation v est directement versée aux vieux. Par conséquent, la dynamique d'équilibre (3.12) s'écrit :

$$s_t = (1+n)k_{t+1}.$$

On s'attend à ce que l'épargne s_t soit inférieure à celle qui prévaudrait en l'absence d'un système de retraite. C'est par exemple le cas si $r = n$, où l'épargne baisse du montant v.

Mais une modification de l'épargne affecte les prix des facteurs : une baisse de l'épargne (individuelle) s'accompagne d'une baisse du stock de capital par tête, et donc d'une hausse du taux d'intérêt et d'une baisse du salaire. La baisse du salaire renforce la baisse de l'épargne ; la hausse du taux d'intérêt a des effets ambigus.

Vérifions chacun de ces deux points. Prenons tout d'abord (w_t, r_{t+1}) donnés. Alors, en différentiant la condition du premier ordre

$$u'(w_t - s_t - v) - \beta(1 + r_{t+1})u'((1 + r_{t+1})s_t + (1+n)v) = 0$$

par rapport à s_t et v, et en évaluant au point $v = 0$, on a :

$$\frac{ds_t}{dv} = -\frac{u''(c_{1t}) + \beta(1 + r_{t+1})(1+n)u''(c_{2t+1})}{u''(c_{1t}) + \beta(1 + r_{t+1})^2 u''(c_{2t+1})} < 0.$$

L'épargne baisse lorsque l'on introduit le système de retraite par répartition ($dv > 0$). Si $r_{t+1} = n$, on a bien $ds_t = -dv$. Plus généralement, $ds_t < -dv$ si $n > r_{t+1}$; et, $ds_t > -dv$ si $n < r_{t+1}$. La baisse de l'offre de capital est plus importante que la hausse de la cotisation retraite si et seulement si l'économie est dynamiquement inefficace. Ou bien encore, étant donné (w_t, r_{t+1}), l'individu a tendance à consommer moins en première période de vie lorsqu'on lui impose un placement (dans le système de retraite) dont le rendement est plus petit que celui du capital ($dc_{1t} = -ds_t - dv$).

Mais il faut aussi prendre en compte la réaction des prix des facteurs à la modification de l'épargne. L'accumulation est pénalisée si, pour tout k_t, le stock de capital k_{t+1} solution de

$$s(w(k_t), r(k_{t+1}), v) = (1+n)k_{t+1}$$

est inférieur à celui qui prévalait en l'absence de système de retraite. Partons de la situation où $v = 0$. Alors,

$$\frac{dk_{t+1}}{dv} = -\frac{s_v}{s_r r'(k_{t+1}) - (1+n)}.$$

On vient de voir que $s_v < 0$. Il s'ensuit que, dans la configuration où $s_r > 0$, $dk_{t+1}/dv < 0$ pour tout t : la retraite par répartition freine l'accumulation du capital. Si, initialement, l'économie était dynamiquement inefficace, $r^* < n$, l'introduction d'un système par répartition est Pareto-améliorante. Sinon, c'est-à-dire si $r^* > n$, elle bénéficie à la génération courante de vieux (qui n'a pas cotisé et reçoit $(1+n)v$) mais en réduisant la consommation par tête de long terme ($dc^* = (f'(k^*) - n)dk^* < 0$), elle doit pénaliser des individus dans le futur. Au nouvel équilibre de long terme, le capital par tête est plus faible : le taux d'intérêt réel est plus élevé et le salaire est plus bas. Une telle réforme tend donc, en ce sens, à pénaliser les travailleurs.

Les réformes de 1993 et 2003 peuvent être interprétées comme une réduction de la place de la répartition au profit de la capitalisation. Nous venons de montrer que *la substitution de la capitalisation à la répartition, alors que l'économie française semble plutôt se trouver dans un régime de sous-accumulation, conduirait à une hausse de l'épargne, et ainsi du rapport capital/travail à long terme. La productivité marginale du capital baisserait et le salaire augmenterait ; en ce sens, une telle réforme favoriserait les travailleurs.*

6.2. Transition répartition/capitalisation

Le fait que les premières générations soient nécessairement sacrifiées pour favoriser les générations suivantes lorsque l'on réduit la part de la répartition au profit de la capitalisation (lorsque l'économie est initialement dynamiquement efficace) dépend crucialement des instruments dont dispose la puissance publique. Par exemple, on pourrait envisager que l'État s'endette pour compenser les générations lésées par la suppression de la répartition, et rembourse sa dette en taxant les générations futures, qui bénéficieraient d'une hausse du stock de capital par tête en l'absence de dette publique.

Pour étudier ce schéma de compensation, nous devons introduire deux instruments supplémentaires : une dette publique et des impôts. Soit une taxe τ_t levée sur les agents vieux à la date t, et b_t la dette par tête émise et remboursée lors de la période suivante augmentée d'un intérêt $r_{t+1}b_t$. Cf. chapitre 4 pour une discussion plus approfondie de la dette publique.

À la date t, le problème d'un individu né en t est de maximiser (3.4) sous les deux contraintes

$$c_{1t} + s_t + b_t = w_t - v_t$$

et

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(s_t + b_t) + p_{t+1} - \tau_{t+1},$$

où τ_{t+1} est un impôt payé par les vieux (en $t+1$). Dans le schéma par répartition, $p_t = (1+n)v_t$.

La contrainte de l'État (nette des comptes de l'organisme de retraite) s'écrit :

$$N_t b_t + N_{t-1}\tau_t = (1 + r_t)N_{t-1}b_{t-1}$$

$$\Leftrightarrow \tau_t = (1 + r_t)b_{t-1} - (1 + n)b_t. \tag{3.19}$$

En utilisant l'égalité emplois-ressources sur le marché du capital, $s_t = (1+n)k_{t+1}$, on peut définir l'équilibre comme une suite $(k_t, t \geqslant 0)$ telle que :

$$u'(c_{1t}) = \beta(1 + r(k_{t+1}))u'(c_{2t+1}),$$

$$c_{1t} = w(k_t) - (1 + n)k_{t+1} - (v_t + b_t),$$

$$c_{2t+1} = (1 + r(k_{t+1}))((1 + n)k_{t+1} + b_t) + p_{t+1} - \tau_{t+1}$$

avec $p_{t+1} = (1+n)v_{t+1}$ et τ_{t+1} donné par la contrainte de budget de l'État (3.19). En utilisant ces deux dernières relations, c_{2t+1} devient :

$$c_{2t+1} = (1 + n)(1 + r(k_{t+1}))k_{t+1} + (1 + n)(v_{t+1} + b_{t+1}).$$

L'équilibre défini par les quatre relations précédentes ne dépend que de la *somme* de la dette et de la cotisation retraite : on verra dans les chapitres suivants qu'il s'agit d'une forme d'équivalence fiscale rémiscente de ce qu'on appelle « l'équivalence ricardienne ». Pour l'instant, on devine qu'il est possible de substituer la dette publique à la cotisation sans affecter l'équilibre : il suffit pour cela que la somme des deux grandeurs ne change pas.

Considérons un exemple d'une telle substitution. Considérons pour cela deux équilibres différents. Le premier est associé à une suite de cotisations $(v, t \geqslant 0)$ dans laquelle la dette est nulle. Le second est associé à une suite de cotisations $v_t = v$ pour tout $t < T$, et $v_t = 0$ pour $t \geqslant T$, la date T s'interprétant comme la date à laquelle le système de retraite par répartition est supprimé. En T, les vieux sont *a priori* lésés : ils ont versé $N_{T-1}v$ durant leur jeunesse et ne reçoivent rien en contrepartie, alors que chacun aurait dû recevoir $(1+n)v$.

Supposons toutefois que l'État s'endette en T du montant $N_T v$ et verse $(1+n)v$ à chaque vieux à cette date. Clairement, si la dette est nulle pour tout $t < T$ dans le second équilibre, la somme $v_t + b_t$ est la même dans les deux équilibres jusqu'en T.

Il faut maintenant s'assurer que cette somme reste la même après la réforme pour tout $t > T$. En $T+1$, si l'État ne dispose que de la dette comme instrument, il va devoir émettre en $T+1$ une nouvelle dette $(1+n)b_{T+1} = (1+r_{T+1})b_T$ pour rembourser la précédente : si $r_{T+1} \neq n$, c'est-à-dire si l'économie n'est pas à la règle d'or, alors $b_{T+1} \neq b_T = v$, et les deux équilibres vont différer l'un de l'autre. Si, par contre, l'État peut taxer les agents, les vieux dans notre exemple, alors il peut choisir de fixer la dette par tête à v et de solder son budget en choisissant l'impôt approprié : il émet donc une nouvelle dette $N_{T+1}v$, rembourse la précédente, $(1+r_{T+1})N_T v$, en choisissant un impôt satisfaisant

$$N_T \tau_{T+1} + N_{T+1} v = (1+r_{T+1})N_T v \Leftrightarrow \tau_{T+1} = (r_{T+1} - n)v.$$

Et plus généralement, pour tout $t > T$,

$$\tau_t = (r_t - n)v.$$

Si l'économie est dynamiquement efficace, il s'agit d'un impôt, sinon il s'agit d'un transfert. La dynamique d'équilibre n'a pas changé, donc l'épargne par tête s_t n'a pas changé, mais les individus jeunes détiennent en plus la dette supplémentaire de l'État (ils épargnent donc plus au total).

6.3. La TVA sociale

Le financement de la protection sociale est essentiellement assuré par des cotisations sociales, assises sur les salaires. Certains ont récemment proposé de leur substituer un impôt sur la consommation (la TVA). Le cadre du modèle à générations imbriquées est particulièrement bien adapté pour discuter cette politique : les prestations sociales relatives au versement des retraites constituent le premier poste de dépenses sociales, ces prestations sont perçues par les vieux inactifs, alors que ce sont les jeunes qui cotisent. Au contraire, la TVA est plus transversale : elle touche les jeunes et les vieux lorsqu'ils consomment. Ainsi, la politique a donc une dimension de redistribution inter-générationnelle importante. Elle semble pénaliser les inactifs (pour lesquels les prix à la consommation augmentent sans que les retraites suivent, si la politique se fait à budget constant), alors que les actifs bénéficient d'une baisse des cotisations (leur revenu net augmente) mais pâtissent de la hausse des prix à la consommation. Ces arguments négligent la réaction des agents à la politique : modifier le revenu au cours du temps implique une réaction de l'épargne, donc du capital, et des prix des facteurs qui viennent à leur tour affecter l'épargne... Tout ceci semble donc bien compliqué de prime abord.

Pour voir quelles sont les forces en présence, introduisons un taux de taxe t sur la consommation et un taux de cotisations τ sur les salaires. Les contraintes budgétaires auxquelles fait face un agent de la génération t s'écrivent :

$$(1+t)c_{1t} + s_t = (1-\tau)w_t$$

et

$$(1+t)c_{2t+1} = (1+r_{t+1})s_t + T.$$

La contrainte de budget intertemporelle s'écrit

$$c_{1t} + \frac{1}{(1+r_{t+1})}c_{2t+1} = \frac{1}{1+t}\left((1-\tau)\,w_t + \frac{T}{1+r_{t+1}}\right).$$

On notera dans ce qui suit W_t le revenu intertemporel de l'agent (le terme entre parenthèses dans le membre de droite de la contrainte). Avec cette notation, les demandes de biens de consommation peuvent être exprimées sous la forme :

$$c_{1t} = c_1\left(\frac{1}{1+r_{t+1}}, \frac{W_t}{1+t}\right), \tag{3.20}$$

$$c_{2t+1} = c_2\left(\frac{1}{1+r_{t+1}}, \frac{W_t}{1+t}\right), \tag{3.21}$$

et l'épargne correspondante est

$$s_t = (1-\tau)\,w_t - (1+t)c_1\left(\frac{1}{1+r_{t+1}}, \frac{W_t}{1+t}\right). \tag{3.22}$$

Cette écriture fait dépendre la consommation du prix relatif du bien demain et du revenu intertemporel, comme dans les sections précédentes du chapitre.

L'État finance les retraites par les cotisations sociales et la TVA. Sa contrainte de budget s'écrit :

$$t\,(N_t c_{1t} + N_{t-1}c_{2t}) + N_t \tau\, w_t = N_{t-1}T,$$

ou bien encore,

$$t\,((1+n)c_{1t} + c_{2t}) + (1+n)\tau\, w_t = T. \tag{3.23}$$

Un équilibre est une situation dans laquelle :

1. Le comportement des ménages est décrit par (3.20), (3.21) et (3.22).
2. Les entreprises maximisent leur profit, $w_t = w(k_t)$, $r_t = r(k_t)$.
3. Les marchés sont équilibrés : par la loi de Walras,

$$s_t = (1+n)k_{t+1}. \tag{3.24}$$

Supposons que, dans la situation initiale, l'économie se trouve en un équilibre stationnaire de laissez-faire ($t_1 = t_2 = \tau = T = 0$). Cette situation est celle qui a été décrite dans les sections précédentes. Une politique de TVA sociale consiste à réduire le taux de cotisations sociales ($d\tau < 0$) et à augmenter le taux de TVA ($dt > 0$) de sorte à maintenir les transferts sociaux T constants ($dT = 0$).

En différentiant la contrainte budgétaire de l'État à l'équilibre stationnaire de laissez-faire, on obtient immédiatement :

$$\left((1+n)c_1^* + c_2^*\right)dt + (1+n)\,w^*\,d\tau = 0. \tag{3.25}$$

L'ajustement du taux de TVA dt en réponse à une baisse du taux de cotisations est proportionnel au rapport des deux assiettes : le taux de TVA augmentera moins que le taux de cotisation baissera si, comme il est réaliste de le supposer, l'assiette de la TVA (la consommation des jeunes et des vieux en t) est plus large que celle des cotisations (les salaires en t).

En différentiant (3.22), on obtient :

$$ds^* = (1-c'_{12})dw^* + c'_{11}\frac{dr^*}{(1+r^*)^2} - (1-c'_{12})w^*d\tau + (c'_{12}w^* - c_1^*)dt,$$

où l'on a noté c'_{11} la dérivée de la fonction de consommation du bien 1 par rapport à son premier argument, le prix relatif du bien 2 par rapport au bien 1, évaluée à l'équilibre stationnaire de laissez-faire. Le signe de cette dérivée est ambiguë : une hausse du prix relatif du bien 2 conduit à une baisse de la consommation du bien 2 et une hausse de la consommation de bien 1 par l'effet de substitution ; une hausse du prix relatif du bien 2 implique une baisse du revenu qui conduit à une baisse de la consommation par l'effet de revenu. Ainsi $c'_{11} > 0$ si l'effet de substitution est dominant, et $c'_{11} < 0$ si l'effet de revenu est dominant. Par contre, comme d'habitude, $0 < c'_{12} < 1$ puisque seul un effet de revenu rentre en jeu.

À l'équilibre, $ds^* = (1+n)dk^*$, $dw^* = w'dk^*$ et $dr^* = r'dk^*$. On en déduit que :

$$\left((1+n) - (1-c'_{12})w' - c'_{11}\frac{r'}{(1+r^*)^2}\right)dk^*$$

$$= -(1-c'_{12})w^*d\tau + (c'_{12}w^* - c_1^*)dt.$$

Si l'équilibre de laissez-faire est localement stable, le terme entre parenthèses dans le membre de gauche est positif. Le fait que les modifications du taux d'intérêt réel implique un changement des prix relatifs au cours du temps n'affecte donc pas le sens de la réaction du stock de capital à la mesure (il affecte par contre son ampleur). Ce sens dépend crucialement des effets revenu de la politique, au travers de c'_{12}. On a :

$$dk^* > 0 \Leftrightarrow (c'_{12}w^* - c_1^*)dt > (1-c'_{12})w^*d\tau.$$

Les ajustements de taux sont liés par contrainte budgétaire (3.25). Pour une baisse des cotisations sociales ($d\tau < 0$), $dk^* > 0$ équivaut à

$$c_2^* > \left[\left((1+n)c_1^* + c_2^*\right) - (1+n)w^*\right]c'_{12}$$

$$\Leftrightarrow (1-c'_{12})c_2^* > -(1+n)(w^* - c_1^*)c'_{12},$$

ce qui est toujours vrai. Dans ce cadre, la TVA sociale implique une hausse du stock de capital par tête dans le long terme. En utilisant la contrainte budgétaire intertemporelle, cette inégalité peut s'écrire indépendamment des niveaux de consommation :

$$dk^* > 0 \Leftrightarrow -\frac{1-c'_{12}}{c'_{12}} < \frac{1+n}{1+r^*}.$$

Intuitivement, comme la TVA sociale n'influence pas la structure des prix relatifs des biens de consommation (dans le long terme), son effet sur l'accumulation, via la décision d'épargne, doit dépendre de la façon dont l'épargne dépend du revenu intertemporel. Au premier ordre, une baisse des cotisations augmente le revenu intertemporel et donc l'épargne. De l'autre côté, la hausse du taux de TVA implique une baisse de la quantité consommée, mais elle est grosso modo compensée par la hausse du prix à la consommation, ce qui limite la réaction de l'épargne. Au final, la baisse des cotisations l'emporte pour déterminer le sens de variation de l'épargne.

7. CONCLUSION

Nous n'avons pas examiné de nombreuses questions relatives aux retraites ; notamment l'équité associée à chaque régime. Il est possible qu'un critère d'équité intra ou intergénérationnel vienne nuancer les résultats décrits, et nous conduise à favoriser la répartition. En outre, l'approche en terme de bien-être pose le problème des préférences sociales (si l'on abandonne le concept ordinal utilisé) : quel poids peut-on donner à chaque génération ? Enfin, alors que les hypothèses de concurrence sont satisfaites, l'équilibre n'est pas un optimum de Pareto. Le chapitre 5 reviendra sur cet échec du marché.

8. EXERCICES ET PROBLÈMES

8.1. Retraite et croissance

On considère une économie dans laquelle chaque agent vit deux périodes. Lorsqu'il est jeune, un agent né en t travaille pour un salaire réel w_t, consomme c_t et épargne s_t à un taux r_{t+1}. Lorsqu'il est vieux, il ne travaille pas et consomme d_{t+1}. Son utilité intertemporelle est :

$$u(c_t) + \beta u(d_{t+1}), \qquad 0 < \beta < 1,$$

avec $u' > 0$ et $u'' < 0$. N_t individus naissent à chaque date t et la croissance démographique se fait à un taux constant : $N_{t+1} = (1+n)N_t$.

Le secteur productif est en concurrence parfaite et utilise une fonction de production à rendements constants, $Y_t = F(K_t, N_t)$, croissante et concave en chacun de ses arguments. On suppose que les biens épargnés à la date t ne sont productifs qu'en $t+1$, et on appelle r_{t+1} le taux d'intérêt sur cette épargne. Le capital ne se déprécie pas.

1. Écrivez la contrainte budgétaire intertemporelle d'un agent né en t. Déduire de la maximisation de son utilité intertemporelle la relation

   $$u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1})u'(d_{t+1}).$$

   Montrez que cela revient à une équation sur s_t. On notera par la suite $s(w_t, r_{t+1})$ la solution de cette équation.

2. En posant :
$$u(c) = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}} c^{1-\frac{1}{\sigma}} & \text{si} \quad \sigma > 0,\ \sigma \neq 1, \\ \ln(c) & \text{si} \quad \sigma = 1, \end{cases}$$
déterminez $s(w_t, r_{t+1})$. Discutez l'effet du taux d'intérêt sur l'épargne.
3. Écrivez le programme de la firme. En déduire r_t et w_t en fonction du stock de capital par tête $k_t = K_t/L_t$. On les notera respectivement $r(k_t)$ et $w(k_t)$, et on définira $f(k) \equiv F(k,1)$.
4. Déduisez de l'équilibre sur le marché du capital l'équation d'évolution de k_t :
$$(1+n)k_{t+1} = s(w(k_t), r(k_{t+1})).$$
Caractérisez le niveau stationnaire k^* de capital par tête.
5. Déterminez k^* dans le cas d'une utilité logarithmique, $\sigma = 1$, et d'une fonction de production Cobb-Douglas, $F(K,N) = K^\alpha N^{1-\alpha}$. Montrer que l'équilibre est stable.
6. On cherche à déterminer si l'équilibre décentralisé maximise le bien-être social défini par
$$W = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^t \left[u(c_t) + \beta u(d_{t+1})\right], \qquad \theta \geqslant 0.$$
Écrivez la contrainte de ressources de l'économie à la date t en termes de grandeurs par tête. Écrivez les conditions du premier ordre par rapport à d_{t+1} et k_{t+1}. Sont-elles vérifiées par l'économie décentralisée ? Montrer que
$$u'(c_t) = \beta(1 + f'(k_{t+1}))u'(d_{t+1}).$$
Cette égalité est-elle vérifiée par l'économie décentralisée ? Commentez.
7. Supposons que l'optimum du planificateur converge vers un état stationnaire $\hat{k}_\theta$. Écrivez la relation satisfaite par le stock de capital lorsque la règle d'or est satisfaite, et lorsque $\theta > 0$. Commentez.
8. Montrez que la règle d'or est vérifiée dans l'économie décentralisée si et seulement si :
$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{n}{(1+n)(1+\beta^{-1})}.$$
9. On cherche maintenant à savoir si l'économie décentralisée conduit à un état stationnaire optimal au sens de Pareto. Le critère de Pareto est-il plus ou moins strict que la maximisation du bien-être ? En définissant la consommation agrégée $z_t \equiv c_t + \frac{d_t}{1+n}$, montrez que pour des valeurs stationnaires de k et z on a :
$$\frac{dz}{dk} < 0 \Longleftrightarrow k > \hat{k}_0.$$
Commentez les situations $k > \hat{k}_0$ et $k < \hat{k}_0$.

10. On introduit à présent une caisse de retraite qui prélève des cotisations λ aux jeunes et verse des pensions μ aux vieux. Dans un système par capitalisation, la caisse de retraite place les cotisations des jeunes sur les marchés financiers et leur rend avec les intérêts lorsqu'ils sont vieux : $\mu = (1 + r_{t+1})\lambda$. On suppose que les agents ne peuvent pas s'endetter.

    Déterminez le revenu actualisé d'un agent né en t.

    Exprimer son épargne s_t en fonction de $s(.,.)$ et de λ. Déduire de l'équilibre sur le marché du capital l'équation d'évolution de k_t. Commentez.

    Déterminez le niveau stationnaire k de capital par tête en fonction du niveau de cotisation λ. À quelle condition l'introduction d'un système par capitalisation permet-elle d'atteindre la règle d'or ?

11. Dans un système par répartition, la caisse de retraite finance les pensions versées aux vieux par les cotisations des jeunes de la même période : $\mu = (1 + n)\lambda$.

    Déterminez le revenu actualisé d'un agent né en t. Exprimez son épargne s_t en fonction de $s(.,.)$ et de λ. Déduisez-en le niveau de cotisation $\hat{\lambda}_0$ permettant d'atteindre la règle d'or.

    Montrer que $\hat{\lambda}_0 > 0$ si et seulement si $\hat{k}_0 < k^*$.

    Quel système de retraite préconiseriez-vous ?

Éléments de correction

1. Contrainte budgétaire de la première période :

$$c_t + s_t = w_t,$$

de la seconde :

$$d_{t+1} = (1 + r_{t+1})s_t,$$

et intertemporelle :

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{1 + r_{t+1}} = w_t.$$

La maximisation de l'utilité intertemporelle sous cette contrainte donne la condition d'Euler)[1] :

$$u'(c_t) = \beta(1 + r_{t+1})u'(d_{t+1}).$$

Elle se réécrit :

$$u'(w_t - s_t) = \beta(1 + r_{t+1})u'((1 + r_{t+1})s_t),$$

ce qui est bien une équation en s_t.

1. L'équation d'Euler peut se retrouver avec un petit raisonnement intuitif. Lorsque l'agent optimise la répartition de sa consommation, consommer un petit peu plus (moins) lorsqu'il est jeune pour consommer un petit peu moins (plus) lorsqu'il est vieux ne modifie pas son utilité. Supposons ainsi qu'il consomme une quantité infinitésimale dx en moins lorsqu'il est jeune, son utilité diminue de $u'(c_t)dx$. Son épargne augmente de dx, donc son revenu lorsqu'il est vieux, et donc sa consommation lorsqu'il est vieux, augmente de $(1 + r_{t+1})u'(d_{t+1})dx$. La condition que son utilité est inchangée donne bien la condition d'Euler.

2. σ est l'élasticité de substitution intertemporelle. On trouve :

$$s(w_t, r_{t+1}) = \frac{w_t}{1+\beta^{-\sigma}(1+r_{t+1})^{1-\sigma}}.$$

Le taux d'intérêt a deux effets opposés sur l'épargne. Lorsqu'il augmente, cela réduit le prix du bien de période $t+1$ (égal à $1/(1+r_{t+1})$) relativement au prix du bien de période t (égal à 1), ce qui amène l'agent à davantage consommer de premier au détriment du second, c'est-à-dire à encourager l'épargne (effet substitution). Cela réduit également le prix du bien de période $t+1$ en termes absolus, tandis que le prix du bien de période t est inchangé, donc l'agent est plus riche et souhaite davantage consommer à chaque période, ce qui tend à réduire l'épargne (effet revenu).

Lorsque les agents ont une forte préférence pour lisser leur consommation au cours du temps (faible élasticité de substitution intertemporelle, $\sigma < 1$), l'effet revenu domine et une augmentation du taux d'intérêt réduit l'épargne. À l'inverse, si les agents sont prêts à des variations de consommation au chapitre de leur vie (forte élasticité de substitution intertemporelle, $\sigma > 1$), une augmentation du taux d'intérêt augmente l'épargne.

3. Les conditions du premier ordre du programme de l'entreprise représentative donnent :

$$r_t = f'(k_t) \equiv r(k_t)$$

et

$$w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t \equiv w(k_t).$$

4. À l'équilibre du marché du capital en t, l'épargne des ménages, $N_t s_t$, est égale à la demande de capital des entreprises, K_{t+1}. On en déduit que

$$(1+n)k_{t+1} = s(w(k_t), r(k_{t+1})).$$

Le niveau stationnaire de capital par tête vérifie donc :

$$(1+n)k^* = s(w(k^*), r(k^*)).$$

5. L'épargne choisie par un agent jeune en t, lorsqu'il fait face au salaire réel w_t et anticipe (parfaitement) le taux d'intérêt réel r_{t+1} est alors égale à :

$$s(w_t, r_{t+1}) = \frac{w_t}{1+\beta^{-1}},$$

d'où

$$(1+n)k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)k_t^\alpha}{1+\beta^{-1}}$$

et

$$k^* = \left(\frac{1-\alpha}{(1+\beta^{-1})(1+n)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

On vérifie graphiquement que cet équilibre est stable.

6. La contrainte de ressources à la date t est :

$$F(K_t, N_t) + K_t = K_{t+1} + N_t c_t + N_{t-1} d_t,$$

soit encore :

$$c_t = f(k_t) + k_t - (1+n)k_{t+1} - \frac{d_t}{1+n}.$$

Le bien-être social s'écrit alors :

$$\sum_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^t \left[u(c_t) + \beta u(d_{t+1})\right],$$

avec donné par l'égalité précédente. La condition du premier ordre par rapport à d_{t+1} est :

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{1}{1+n}u'(c_{t+1}) = \beta u'(d_{t+1}),$$

et par rapport à k_{t+1},

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{1}{1+n}(1+f'(k_{t+1}))u'(c_{t+1}) = u'(c_t).$$

Ces deux conditions n'ont aucun raison d'être spontanément vérifiées par l'équilibre décentralisé.

En revanche, en combinant ces deux conditions, on obtient :

$$u'(c_t) = \beta(1+f'(k_{t+1}))u'(d_{t+1}),$$

qui est exactement l'équation d'Euler satisfaite par l'équilibre décentralisé. La répartition de la consommation entre jeunesse et vieillesse pour une génération donnée faite par le planificateur est identique à ce que feraient ces individus dans une économie décentralisée. La différence entre l'équilibre décentralisé et la planification optimale provient de l'allocation des ressources entre les générations.

7. Pour $\theta = 0$, la condition du premier ordre par rapport à k_{t+1} donne $f'(\hat{k}_0) = n$; cette relation est appelée la règle d'or. Pour $\theta > 0$, on a la règle d'or modifiée : $f'(\hat{k}_\theta) = (1+n)(1+\theta)-1 \simeq n+\theta$. Un planificateur qui valorise davantage les générations présentes sacrifie l'accumulation du capital pour augmenter la consommation présente, d'où le résultat que $\hat{k}_\theta$ est décroissant en θ (car f' est décroissante).
8. $r^* = \frac{\alpha(1+\beta^{-1})(1+n)}{1-\alpha}$, dont on déduit la condition demandée. Il n'y a aucune raison pour que cette condition soit satisfaite.
9. Lorsque le bien-être social est maximisé, il n'est pas possible d'augmenter strictement la consommation d'une génération sans diminuer celle d'une autre. Par conséquent la Pareto-optimalité est un critère moins strict que la maximisation du bien-être.

De l'égalité emplois-ressources à l'état stationnaire, on déduit $f(k) - nk = z$. Donc

$$\frac{dz}{dk} = f'(k) - n,$$

qui est nul pour $k = \hat{k}_0$, positif pour $k < \hat{k}_0$ et négatif pour $k > \hat{k}_0$. Notons qu'on retrouve bien la définition que le stock de capital à la règle d'or maximise un niveau constant de consommation par tête.

Considérons un état stationnaire tel que $k > \hat{k}_0$. Supposons qu'à une date donnée, on réduit brusquement le stock de capital à $\hat{k}_0$ puis on reste à ce niveau. Cela augmente la consommation agrégée à cette date car on accumule moins de capital, et cela augmente également toutes les consommations agrégées futures par définition de la règle d'or. On peut donc améliorer strictement le bien-être de toutes les générations présentes et futures, c'est une amélioration au sens de Pareto. Une situation de sur-accumulation du capital ($k > \hat{k}_0$) est donc Pareto sous-optimale. On dit dans ce cas qu'il y a inefficacité dynamique.

Ce raisonnement ne fonctionne pas pour une situation de sous-accumulation du capital ($k < \hat{k}_0$), car se déplacer à la règle d'or demande de sacrifier de la consommation présente pour augmenter le stock de capital. L'économie est alors dynamiquement efficace.

10. Le revenu actualisé d'un agent né en t,

$$w_t - \lambda + \frac{\mu}{1 + r_{t+1}} = w_t,$$

est inchangé par rapport à une situation sans caisse de retraite. L'agent veut donc consommer autant à chaque période, ce qui implique d'épargner $s(w_t, r_{t+1}) - \lambda$.

Lorsque cette valeur est négative, cela signifie que les agents voudraient emprunter, ce que nous avons supposé impossible. L'épargne est donc :

$$s_t = \max\{s(w_t, r_{t+1}) - \lambda, 0\}.$$

L'offre de capital à la date t est maintenant constituée des ménages, $N_t s_t$, et de la caisse de retraite, $N_t \lambda$. L'équilibre du marché du capital s'écrit donc

$$(1 + n) k_{t+1} = \max\{s(w(k_t), r(k_{t+1})) - \lambda, 0\} + \lambda.$$

Si $\lambda \leqslant s(w(k_t), r(k_{t+1}))$, alors le système par capitalisation est neutre vis-à-vis du processus d'accumulation du capital. Dans le cas contraire, les agents se retrouvent en situation d'épargne forcée et le système par répartition influence le sentier d'accumulation du capital.

On a $s(w, k) = w/(1 + \beta^{-1})$ et $w(k) = (1 - \alpha) k^{\alpha}$, d'où :

$$(1 + n) k = \max\left\{\frac{1 - \alpha}{1 + \beta^{-1}} k^{\alpha} - \lambda, 0\right\} + \lambda.$$

Puis,

$$k = \begin{cases} k^* & \text{si} \quad \lambda \leqslant (1+n)k^*, \\ \lambda/(1+n) & \text{si} \quad \lambda \geqslant (1+n)k^*. \end{cases}$$

Un système par capitalisation peut augmenter le niveau de capital par tête par rapport à l'équilibre décentralisé, mais pas le diminuer. Il permet d'atteindre la règle d'or en choisissant $\lambda = (1+n)\hat{k}_0$ si et seulement si l'économie décentralisée est en situation de sous-accumulation : $k^* < \hat{k}_0$.

11. Le revenu actualisé d'un agent né en t est maintenant :

$$w_t + \frac{n - r_{t+1}}{1 + r_{t+1}}\lambda.$$

Son épargne est donc :

$$s_t = \max\left\{ s\left(w_t + \frac{n - r_{t+1}}{1 + r_{t+1}}\lambda, r_{t+1} \right) - \frac{1+n}{1+r_{t+1}}\lambda, 0 \right\}.$$

La caisse de retraite n'intervient pas sur les marchés financiers, donc l'équilibre sur le marché des titres s'écrit :

$$(1+n)k_{t+1} = s_t$$

avec s_t donnée ci-dessus. Le niveau de cotisation qui implémente la règle d'or est :

$$\hat{\lambda}_0 = s(w(\hat{k}_0), n) - (1+n)\hat{k}_0.$$

Le niveau de cotisation

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{1-\alpha}{1+\beta^{-1}}\hat{k}_0^{\alpha} - (1+n)\hat{k}_0$$

n'est réalisable que s'il est positif, ce qui revient à $\hat{k}_0 < k^*$. Le système de retraite par répartition permet d'améliorer le fonctionnement d'une économie décentralisée en situation de sur-accumulation du capital car il y a réduction de l'épargne.

Lorsque l'économie est en situation de sous-accumulation du capital, la capitalisation permet d'augmenter l'épargne et d'atteindre la règle d'or. À l'inverse, lorsque l'économie est en situation de sur-accumulation du capital, la répartition permet de diminuer l'épargne et d'atteindre la règle d'or.

8.2. Retraite et vieillissement

Ce problème s'intéresse aux conséquences du vieillissement de la population sur le système de retraite par répartition et l'accumulation du capital dans le long terme. Il s'inspire de d'Autume, 2003, Vieillissement et choix de l'âge de la retraite : que peut nous dire le modèle à générations ?, *Revue Économique* 54, 561-571. Dans le cadre du système de retraite par répartition, trois mesures sont habituellement envisagées pour

faire face à la hausse des pensions versées qu'entraîne le vieillissement de la population : (1) une hausse des cotisations, (2) une hausse de la durée d'activité donnant droit à la retraite et (3) une baisse des pensions au travers d'une baisse du taux de remplacement.

On considère une version du modèle à générations imbriquées de Diamond (1965). Le temps est découpé en périodes de 1 unité de temps. Au début de la période t, N_t nouveaux individus rentrent dans l'économie, et l'on impose $N_t = (1+n)N_{t-1}$. Lors de leur première période de vie, ils consomment, épargnent, travaillent durant toute la période, et acquittent des cotisations proportionnelles à leur salaire au taux θ. Lors de leur seconde période de vie, ils travaillent z unité de temps, $0 \leqslant z < 1$, acquittent à nouveau des cotisations proportionnelles à leur salaire au taux θ, reçoivent une pension proportionnelle au salaire courant perçu (par les actifs) sur toute la durée de leur propre retraite, au taux de remplacement λ. Ils meurent T unité de temps, $0 \leqslant T \leqslant 1$, après le début de leur seconde période de vie. On imposera $0 \leqslant z \leqslant T \leqslant 1$.

Les préférences d'un individu né en t sont représentées par la fonction d'utilité $u(c_{1t}) + \beta T u(c_{2t+1})$, où $\beta < 1$.

1. Écrivez la condition d'équilibre des comptes de la caisse de retraite lors de la période t en fonction de θ, λ, T, z et n.
2. Il n'est pas nécessaire de répondre à cette question pour répondre aux questions suivantes, et seuls des ordres de grandeurs approximatifs vous sont demandés. Supposons que chaque période dure 35 ans et qu'un individu devienne actif à 25 ans. Avec un âge minimal de départ en retraite égal à 60 ans, un taux de cotisations en moyenne égal à 20 %, et en utilisant les données reportées dans la figure 2, donnez le taux de remplacement assurant l'équilibre des comptes de la caisse de retraites. Si l'espérance de vie augmentait de 10 ans, que deviendrait-il ?
3. Écrivez les deux contraintes budgétaires auxquelles fait face un individu né en t, et le programme qu'il doit résoudre. Si la durée z était librement choisie par l'individu, quelle serait sa valeur ? Cela vous semble-t-il conforme aux données de la figure 2 ?
4. On supposera dorénavant que z est choisie par la caisse de retraite. Écrivez la contrainte budgétaire intertemporelle d'un individu né en t. Déduisez-en que l'on peut écrire son épargne
$$s_t = s(r_{t+1}, W_t)$$
où W_t représente le revenu actualisé de cet individu. Comment réagit l'épargne individuelle à une variation des salaires, des différents paramètres de politique économique, et du taux d'intérêt ? Vous interprèterez économiquement chacun de ces effets.
5. La production à la date t est donnée par $F(K_t, L_t)$, où F est homogène de degré 1, et L_t représente la population active en t. Les entreprises se comportent de façon concurrentielle. Définissez un équilibre stationnaire avec prévisions parfaites de cette économie, lorsque les comptes de la Caisse sont équilibrés. Vous noterez k_t le stock de capital par tête (d'actif).

Évolution de la population (en milliers)

	Population en milieu d'année	Naissances	Décès	Solde naturel	Solde migratoire
2004	62 445	800,2	519,6	+ 280,6	+ 105
2005	62 818	807,8	538,2	+ 269,6	+ 92

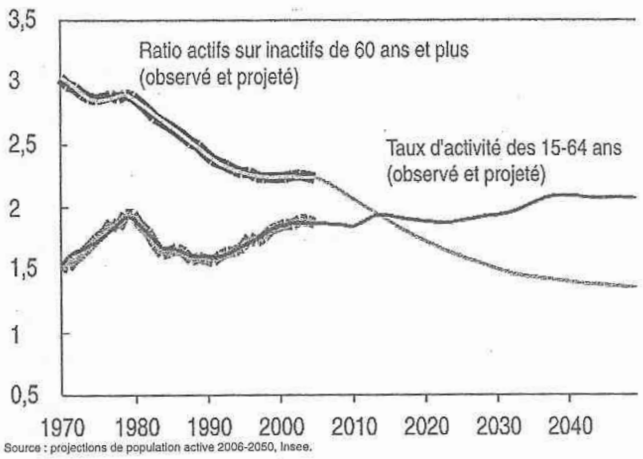
Champ : France métropolitaine et Dom.
Source : Insee, bilan démographique.

Espérance de vie à divers âges (en années)

	À la naissance		À 20 ans		À 60 ans	
	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes
2004	83,9	76,8	64,3	57,4	26,5	21,5
2005	83,8	76,8	64,3	57,4	26,4	21,5

Champ : France métropolitaine.
Source : Insee, bilan démographique.

Ratio actifs/inactifs



Source : projections de population active 2006-2050, Insee.

Âge de liquidation de la retraite

En %

	Hommes	Femmes	Ensemb
Avant 55 ans	6,2	3,8	5,1
Entre 55 et 59 ans	15,7	9,4	12,5
60 ans	40,5	37,3	38,9
61 ans	7,3	6,6	7,0
62 ans	4,1	4,7	4,4
63 ans	3,6	3,7	3,7
64 ans	2,9	3,0	3,0
65 ans	14,6	25,7	20,1
Après 65 ans	5,1	5,8	5,3
Total	100,0	100,0	100,0

Champ : Personnes retraitées ayant exercé une activité professionnelle, âgées de 50 ans et plus.

Source : Enquête complémentaire à l'Enquête Emploi de mars 1996, réalisée par l'INSEE en collaboration avec la CNAV, le SESI et la DARES (ministère de l'Emploi et de la Solidarité).

FIGURE 2
Projections démographiques et retraites

6. On supposera que le taux de cotisations θ est choisi par la Caisse et que le taux de remplacement assure l'équilibre des comptes. Initialement, l'âge de la retraite est fixé à 60 ans, et on supposera que le taux de cotisations θ, égal à à 0,2, est suffisamment petit pour être approximé à 0. Comment réagit alors le stock de capital stationnaire à une hausse de l'espérance de vie, de l'âge de la retraite et du taux de cotisation. Expliquez chacune de ces réactions.

Éléments de correction

1. Les cotisations sont égales à $N_t\theta w_t$ (sur les jeunes actifs) augmentées de $N_{t-1}\theta z w_t$ (sur les vieux actifs). Les prestations sont égales à $N_{t-1}\lambda(T-z)w_t$. L'équilibre des comptes de la Caisse s'écrit donc :

$$N_t\theta w_t + N_{t-1}\theta z w_t = N_{t-1}\lambda(T-z)w_t$$

$$\Leftrightarrow (1+n)\theta + \theta z = \lambda(T-z). \tag{3.26}$$

2. La première période de vie va de 25 à 60 ans ; la seconde de 60 à $60+35T$. L'équation (3.26) lie le taux de cotisation θ, le taux de remplacement λ et le ratio de dépendance, mesuré par le rapport du nombre d'inactifs (de plus de 60 ans) sur le nombre d'actifs :

$$\theta = \lambda\frac{T-z}{1+n+z}.$$

L'âge de la retraite est 60 ans, de sorte que $z=0$. La figure 2 donne

$$\frac{T-z}{1+n+z} = \frac{T}{1+n} \simeq \frac{1}{2.2}.$$

Pour $\theta = 0.2$, on a donc

$$\lambda \simeq 0.2 \times 2.2 \simeq 0.5.$$

Le taux de remplacement serait donc de l'ordre de 50 %.
Soit ν le taux de croissance démographique annuel. On a donc :

$$1+n = (1+\nu)^{35} \Leftrightarrow \log(1+n) = 35\log(1+\nu).$$

Pour n et ν suffisamment proches de 0, on a approximativement

$$n \simeq 35\nu.$$

La figure 2 donne $\nu = (269.6+92)/62818 \simeq (360/630)$ % $\simeq 0,5$ %, et donc $n \simeq 0,17$ %. Il s'ensuit qu'initialement

$$T \simeq \frac{1,17}{2,2} \simeq 0,55,$$

ce qui correspond à une espérance de vie de l'ordre de $60+0.55\times 35 \simeq 78$ ans. Si elle augmente de 10 ans, passant donc à 88 ans, on aura

$$\lambda \simeq 0,2 \times \frac{1+n}{T} \simeq 0,2 \times \frac{1,17}{0,55+0,35} \simeq 0,2 \times 1,3 = 0,26.$$

Le taux de remplacement passerait donc de 50 à 25 % environ. Ce chiffre illustre bien les difficultés auxquelles le système de retraite par répartition devrait faire face à l'horizon 2050.

3. Les deux contraintes budgétaires s'écrivent

$$c_{1t} + s_t = (1-\theta)\, w_t$$

$$c_{2t+1} = (1+r_{t+1}) s_t + (1-\theta) z w_{t+1} + \lambda (T-z) w_{t+1}.$$

Une hausse de z augmente le revenu intertemporel si et seulement si $1-\theta-\lambda > 0$. Comme il n'y a pas de désutilité au travail, on aura donc $z = 0$ si $1-\theta-\lambda < 0$ et $z = T$ sinon. Aujourd'hui, pour $\theta = 0.2$ et $\lambda = 0.5$, les individus devraient repousser l'âge de leur retraite. La figure 2 montre que les individus quittent massivement l'activité à 60 ans, soit pour $z = 0$, ce qui suggère que la désultilité au travail chez des plus âgés est importante.

4. On a :

$$s_t = s(r_{t+1}, W_t)$$

où W_t représente le revenu actualisé de cet individu.

La contrainte budgétaire intertemporelle s'écrit :

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}} = (1-\theta) w_t + ((1-\theta) z + \lambda (T-z)) \frac{w_{t+1}}{1+r_{t+1}}.$$

On peut donc écrire :

$$s_t = s\left(r_{t+1}, (1-\theta) w_t + ((1-\theta) z + \lambda (T-z)) \frac{w_{t+1}}{1+r_{t+1}}\right).$$

Pour $dr_{t+1} > 0$, effet de substitution et deux effets de revenu. Habituel.

Pour $dw_t > 0$, ou $dw_{t+1} > 0$, ou $d\lambda > 0$, on a un effet de revenu seulement. Le revenu intertemporel augmente, et la séparabilité de la fonction d'utilité implique la normalité de la consommation lors de chaque période. Donc, $dc_{1t} > 0$, $dc_{2t+1} > 0$. En utilisant CB2, on a $dw_t > 0 \Rightarrow ds_t > 0$. En utilisant la CB1, $dw_{t+1} > 0$, ou $d\lambda > 0 \Rightarrow ds_t < 0$. Lissage du revenu au cours du temps. Pour les retraites, $d\lambda > 0$ joue comme une hausse du revenu de seconde période, ce qui réduit l'épargne.

Les conséquences d'une petite modification $d\theta$ sont incertaines.

Dans la conjoncture actuelle, on aurait plutôt $d\lambda < 0$ et/ou $d\theta > 0$, ce qui devrait conduire à une hausse de l'épargne, et donc du stock de capital. Mais une hausse du stock de capital modifie le prix des facteurs : le salaire augmente et le taux d'intérêt baisse. Les questions suivantes précisent ce point.

L'effet de dz est ambigu pour la même raison que dans la question 3. Si l'on se place dans le cas où $1-\theta-\lambda < 0$, $dz > 0$ baisse le revenu de seconde période et conduit donc à une hausse de l'épargne.

5. La population active en t est $N_t + zN_{t-1}$. L'équilibre sur le marché du capital s'écrit :

$$S_t = N_t s_t = K_{t+1}$$
$$\Leftrightarrow s_t = \frac{N_{t+1} + zN_t}{N_t} \frac{K_{t+1}}{N_{t+1} + zN_t} = (1 + n + z)\, k_{t+1}.$$

L'équilibre intertemporel est tel que :

$$s_t = s\left(r_{t+1}, (1-\theta)\, w_t + ((1-\theta)z + \lambda(T-z))\, \frac{w_{t+1}}{1 + r_{t+1}}\right),$$
$$(1+n)\theta + \theta z = \lambda(T-z),$$
$$s_t = (1 + n + z)\, k_{t+1}$$
$$r_t = f'(k_t) = r(k_t),$$
$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) = w(k_t).$$

Un équilibre stationnaire est donc tel que :

$$(1 + n + z)\, k^* = s\left(r(k^*), (1-\theta)\, w(k^*) + ((1-\theta)z + \lambda(T-z))\, \frac{w(k^*)}{1 + r(k^*)}\right),$$
$$\lambda = \theta \frac{1 + n + z}{T - z}.$$

6. On remplace λ par son expression en fonction de θ :

$$s\left(r(k^*), (1-\theta)\, w(k^*) + (z + (1+n)\,\theta)\, \frac{w(k^*)}{1 + r(k^*)}\right) = (1 + n + z)\, k^*.$$

On constate immédiatement qu'une hausse de l'espérance de vie, $dT > 0$, n'a aucun effet sur l'accumulation à long terme. Le système de retraite la neutralise.

Initialement, $z = 0$. On suppose pour simplifier que θ est suffisamment petit initialement pour être posé à 0 (en pratique, $\theta = 0,2$).

On a alors :

$$\frac{dk^*}{d\theta} = \frac{1}{1 + r^*} \frac{s_w\, (n - r^*)\, w^*}{(1+n) - s_r\, r'(k^*) - s_w\, w'(k^*)},$$

et

$$\frac{dk^*}{dz} = \frac{1}{1 + r^*} \frac{s_w\, w^* - (1 + r^*)\, k^*}{(1+n) - s_r\, r'(k^*) - s_w\, w'(k^*)}.$$

La condition de stabilité locale impose que $(1 + n) > s_r\, r'(k^*) + s_w\, w'(k^*)$; cf. le chapitre 3. Donc :

$$\frac{dk^*}{d\theta} > 0 \Leftrightarrow n > r^* \Leftrightarrow k^* > k_{\text{or}}.$$

Si l'économie est dynamiquement inefficace, alors la hausse des cotisations a un effet négatif sur l'accumulation à long terme.

Le signe de dk^*/dz est ambigu : une hausse de l'âge de la retraite a tendance à faire baisser le revenu de seconde période, ce qui conduit à une hausse de l'épargne et du stock de capital mais, en augmentant le nombre d'actifs, il réduit (mécaniquement) le stock de capital par tête.

8.3. Logement et croissance

On constate que l'acquisition d'un logement est souvent l'un des principaux motifs d'épargne des ménages, et l'on pourrait penser que le logement, en impliquant une hausse de l'épargne, est favorable à la croissance. Ce problème s'intéresse au lien entre le marché du logement et la croissance économique dans le long terme ; il s'inspire de Deaton, et Laroque, Housing, Land Prices and Growth, *Journal of Economic Growth* 6, 2001. On considère une version du modèle à générations imbriquées de Diamond dans lequel les agents vivent durant deux périodes consécutives. La population croît au taux n, $n \geqslant 0$. Lors de leur première période de vie, les agents travaillent, consomment et achètent un logement. Durant leur seconde période de vie, ils consomment et vendent leur logement. On supposera, pour simplifier, que l'offre agrégée de logements est fixe ; elle est notée H.

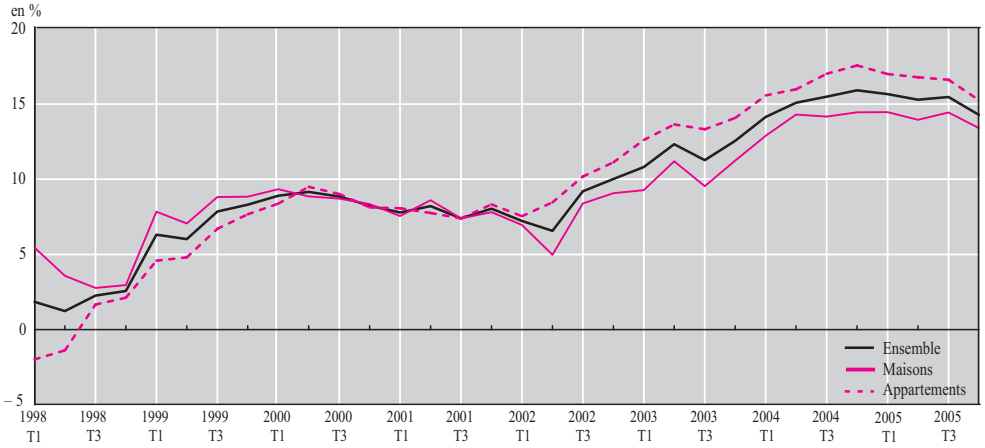
Les préférences d'un agent né en t peuvent être représentées par une fonction d'utilité

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}) + \gamma h_t$$

où $u(\cdot)$ est croissante et strictement concave, c_{1t} et c_{2t+1} représentent les consommations de première et de seconde période de vie, h_t est la surface du logement et γ, $\gamma \geqslant 0$, est un poids qui représente l'importance du logement pour le ménage. Le facteur d'escompte β est supposé strictement positif.

1. Soit p_t le prix unitaire du logement (en terme du bien de consommation). Écrivez le programme que doit résoudre un agent né en t.
2. Écrivez la contrainte la contrainte budgétaire intertemporelle d'un agent né en t.
   - 2.1. Décrivez les deux effets de substitution et l'effet de revenu qui rentrent en jeu lorsque le taux d'intérêt varie ; vous pourrez les appliquer aux conséquences d'une hausse du taux d'intérêt sur la consommation de première période. Remarquez que la réaction de l'épargne à une variation du taux d'intérêt est ambiguë.
   - 2.2. Décrivez l'effet de substitution et l'effet de revenu qui rentrent en jeu lorsque le prix d'achat du logement varie. Comment la demande de logement réagit-elle à une hausse du prix du logement ?
3. Soit $Y_t = F(K_t, L_t)$ la production agrégée, où K_t est le stock agrégé de capital en t, L_t la quantité de travail agrégée en t, et $F(\cdot)$ est croissante avec chacun de ses arguments, concave, et à rendements d'échelle constants. Les entreprises se comportent de façon concurrentielle. Écrivez les quatre conditions d'égalité emplois-ressources sur chacun des marchés ouverts en t. Certaines de ces conditions sont-elles redondantes ?
4. On se place en un équilibre stationnaire. En un tel équilibre, le stock de capital par tête est constant, égal à k^*. En utilisant la contrainte budgétaire de première période, obtenue question 1, et la condition d'équilibre sur le marché du logement, déterminez le taux de croissance du prix du logement en un tel équilibre. Rapprochez de la figure 3.

① **Évolutions annuelles du prix des logements anciens**



Champ : logements anciens, France métropolitaine.
Lecture : au 4e trimestre 2005, le prix des appartements en France métropolitaine a augmenté de15,3 % au cours des 12 derniers mois.
Sources : Chambre interdépartementaledes notaires de Paris (indices franciliens), Perval (autres régions), Insee.

FIGURE 3

5. Comment est situé le stock de capital k^* en un équilibre stationnaire par rapport au stock de capital k^*_{or} de la règle d'or ? Comment la prise en compte du logement influence-t-elle l'accumulation à long terme ? Vous pourrez prendre par exemple comme référence la version du modèle de Diamond avec monnaie (mais sans logement), et supposer que l'équilibre de long terme avec monnaie est unique, et que l'économie se trouve à cet équilibre. Expliquez.
6. (*Aucun calcul n'est demandé*). Que se passerait-il si les logements étaient complètement nationalisés et distribués forfaitairement par l'État aux ménages ? Cette alternative devrait-elle être préférée au marché pour le logement ?

Éléments de correction

1. Un ménage né en t choisit (c_{1t}, c_{2t}, h_t) qui maximise

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}) + \gamma h_t$$

sous les contraintes

$$c_{1t} + p_t h_t + s_t \leqslant w_t$$

et

$$c_{2t+1} \leqslant (1 + r_{t+1}) s_t + p_{t+1} h_t.$$

On impose en outre $c_{1t} \geqslant 0$, $c_{2t+1} \geqslant 0$ et $h_t \geqslant 0$.

2. La contrainte budgétaire intertemporelle s'écrit :

$$c_{1t} + \left(p_t - \frac{p_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \right) h_t + \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}} \leqslant w_t.$$

2.1. *Une hausse du taux d'intérêt* (1) conduit à une baisse du prix relatif de la consommation de seconde période, et donc, par un effet de substitution, une baisse de la consommation de seconde période, une hausse de la consommation de première période, et une hausse de la demande de logements, et (2) une hausse du prix relatif du logement, et donc, par un effet de substitution, une hausse de la consommation de première et de seconde période, et une baisse de la demande de logements. Au total, la consommation de première période augmente, mais la réaction des autres variables sont *a priori* ambiguës. En particulier, l'effet sur l'épargne ne peut pas être prédit à ce stade : si la demande de logement augmente, l'épargne doit baisser ; elle doit augmenter sinon. L'effet de revenu conduit à une hausse de la consommation lors de chaque période et de la demande de logement ; il rend plus vraisemblable de voir l'épargne baisser à la suite d'une hausse du taux d'intérêt.

2.2. *Une hausse du prix d'achat du logement*, p_t, augmente le prix relatif du logement. Au travers d'un effet de substitution, elle conduit donc à une baisse de la demande de logement, une hausse de la consommation lors de chaque période. La contrainte budgétaire de seconde période (saturée) montre que l'épargne augmente. L'effet de revenu conduit à une baisse de la consommation lors de chaque période et de la demande de logement.

La seule réaction non-ambiguë est celle du logement, qui baisse avec p_t.

3. À chaque date, sont ouverts les marchés pour le bien de consommation, les facteurs de production, et le logement. Par la loi de Walras, on considère uniquement le marché du capital, du travail et du logement. Les conditions d'égalité emplois-ressources s'écrivent :

$$N_t c_{1t} + N_{t-1} c_{2t} + K_{t+1} = F(K_t, L_t),$$

$$N_t s_t = K_{t+1},$$

$$N_t = L_t,$$

$$N_t h_t = H.$$

4. En un équilibre stationnaire, la consommation (par tête), l'épargne (par tête) et le salaire sont constants. La contrainte budgétaire de première période (saturée) implique donc que $p_t h_t$ reste lui aussi constant. Or, l'équilibre sur le marché du logement implique que h_t décroît au taux n. Il s'ensuit que le prix du logement croît au taux de croissance démographique, n. Soit :

$$\frac{p_{t+1}}{p_t} = 1 + n.$$

5. Puisque la demande de logement est finie, on doit avoir :

$$p_t - \frac{p_{t+1}}{1 + r_{t+1}} > 0.$$

Sinon, les ménages demanderaient une quantité infinie de logement (et pas de capital) : le logement a un effet positif sur le bien-être individuel et son rendement domine celui du capital. Soit :

$$\frac{p_{t+1}}{p_t} < 1 + r^*.$$

Il suit de la question 4 que :

$$n < r^* \Leftrightarrow k^*_{\text{or}} > k^*.$$

Si, en l'absence de logement, l'économie se trouve à la règle d'or (c'est le cas dans la situation de référence), le logement freine l'accumulation du capital. L'intuition est claire : s'il est vrai que les agents jeunes doivent renoncer à consommer une quantité de biens pour acquérir un logement, il n'en résulte pas forcément une épargne supplémentaire au niveau agrégé, puisque le logement est acheté aux vieux et que ces derniers s'empressent de consommer le revenu de la vente de leur logement !

6. Si l'on se donne comme critère la maximisation de la consommation par tête de long terme, il est possible de choisir k^*_{or} en allouant autoritairement H logements aux ménages. En ce sens, la nationalisation est préférable au marché.

8.4. Accumulation et développement

Ce problème s'inspire de Drazen et Eckstein, 1988, On the Organization of Rural Markets and the Process of Economic Development, *American Economic Review* 78, 431-443. Un processus de développement comprend très souvent une transition d'une économie rurale à une économie industrielle. L'objectif de ce problème est de rendre compte de cette transition. On considère une économie dans laquelle coexistent deux secteurs d'activité : le secteur agricole X, et le secteur industriel Y. La production du bien agricole se fait à partir de terre et de travail ; celle du bien industriel se fait à partir de capital et de travail. Les fonctions de production correspondantes s'écrivent :

$$X = F^X(T, L^X), \quad \text{et } Y = F^Y(K, L^Y),$$

où T est la quantité totale de terre. Le bien Y peut être consommé ou servir de capital. Les fonctions de production ont les propriétés habituelles : les rendements marginaux de chaque facteur sont positifs et décroissants, les rendements d'échelle sont constants, et elles satisfont les conditions d'Inada. La quantité totale de terre, T, de travail, L, et le stock de capital initial K_0 sont donnés.

La population est constituée de générations d'individus vivant deux périodes consécutives. Le nombre d'individus de chaque génération est constant et égal à N ; chacun offre une unité de travail de façon inélastique. Les jeunes nés en t travaillent (ils touchent alors un salaire w_t exprimé en biens agricoles quel que soit le secteur d'activité) et consomment une quantité x_{1t} de biens agricoles et y_{1t} de biens industriels. Soit $c_{1t} = x_{1t} + y_{1t}$ leur consommation totale. Ils peuvent transférer leur

richesse au cours du temps en achetant de la terre ou du capital physique (qu'ils loueront aux entreprises) ; le taux d'intérêt réel est r_t quelle que soit la forme prise par l'épargne. Devenus vieux, ils consomment $c_{2t+1} = x_{2t+1} + y_{2t+1}$. Leur préférences sont représentées par la fonction d'utilité

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}),$$

où $u' > 0$ et $u'' < 0$.

1. Commentez les hypothèses faites sur les préférences individuelles et sur la mobilité intersectorielle des facteurs de production.
2. Soit q_t le prix de bien industriel en t en termes du bien agricole. Écrivez les contraintes de budget d'un individu de la génération t ; vous noterez s_t l'épargne réelle et r_t le taux d'intérêt réel (tous les deux exprimés en biens agricoles). Soit $s(\cdot)$ la fonction d'épargne. Quels sont les arguments de $s(\cdot)$? Comment l'épargne varie-t-elle avec chacun d'eux ?
3. Supposons que la dépréciation du capital soit complète et que l'entreprise représentative du secteur industriel se comporte de façon concurrentielle. Écrivez sa fonction de profit et les conditions du premier ordre associées à la maximisation du profit.
4. Soit p_t le prix de la terre en t en termes du bien agricole. Écrivez la fonction de profit de l'entreprise représentative du secteur X (en notant que la terre ne se déprécie pas). Si cette entreprise se comporte de façon concurrentielle, quelles sont les conditions du premier ordre associées au problème de maximisation de son profit ?
5. Écrivez la condition d'égalité emplois-ressources sur le marché du bien X et sur le marché du bien Y.
6. Quelle est la valeur de q_t à l'équilibre si les deux types de biens sont consommés ? Définissez un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites de cette économie. Les variables seront exprimées par tête d'individu jeune ; vous noterez λ_t^X et λ_t^Y les proportions de travailleurs dans les secteurs X et Y respectivement.
7. Montrez qu'à l'équilibre, une hausse du stock de capital par tête conduit à une hausse de la quantité de travail employée dans le secteur industriel et des salaires. Décrivez le mécanisme économique à l'œuvre.
8. En utilisant les résultats de la question 6, écrivez la dynamique du capital et du prix de la terre. Quelles sont les grandeurs qui sont fixées (préterminées) en t ? Quelles sont celles qui sont déterminées en t ? Celles qui sont anticipées en t ?
9. Tracez le diagramme des phases associé au système obtenu dans la question précédente en supposant que le stock de capital influence peu les décisions de migration. Quelle hypothèse sur la technologie vous permettrait de justifier cette hypothèse ? Vous semble-t-elle réaliste ? Notez que le stock de capital par tête augmente lorsque le prix de la terre est initialement suffisamment élevé. Commentez.

10. Supposons maintenant que la terre ne peut plus être échangée sur un marché. Elle est distribuée initialement uniformément entre N^T individus, les propriétaires terriens, chacun la laissant à son (unique) descendant. Quelle condition doit maintenant satisfaire la quantité de travail dans le secteur X ? Le revenu de la terre est touchée par les vieux ; vous noterez $\pi_t(w_t)$ ce revenu lors de la période t. À l'exception de ce revenu perçu, les propriétaires se comportent comme précédemment.
11. Définissez l'équilibre sur le marché de l'épargne. Montrez qu'une plus grande proportion de propriétaires conduit à une baisse du stock de capital par tête. Selon vous, cela rapproche-t-il le stock de capital stationnaire de celui obtenu question 6 ?
12. Discutez l'optimalité des équilibres stationnaires lorsque la terre est l'objet d'un marché et lorsqu'elle est possédée par une classe de propriétaires fonciers. Serait-il profitable de confisquer les terres possédées pour les redistribuer et créer un marché pour la terre ?

9. REPÈRES BIBLIOGRAPHIQUES

Les dernières projections démographiques sont décrites dans Robert-Bobée (2006). Pour ce qui concerne le modèle à générations de Diamond (1965), l'article fondateur Diamond (1965) reste une bonne référence ; sinon, Blanchard et Fischer (1989), Sections 3.1 et 3.2, ou Azariadis (1993), Sections 7.4, 7.5 et 18.1. Le bien-être de long terme associé à chacun des deux régimes de retraite est étudié dans Demange et Laroque (2000). Belan et Pestieau (2002) analysent le rôle que peuvent jouer les différents instruments à la disposition de l'État pour résoudre les problèmes liés à la transition d'un régime de retraite à un autre.

CHAPITRE 4

Consommation et épargne

1. INTRODUCTION

Ce chapitre a pour objet d'étudier plus systématiquement la relation qui unit la consommation et l'épargne au cours du temps qui a été esquissée dans le cadre du modèle à deux périodes dans le chapitre précédent. Il nous sert d'introduction au chapitre suivant, dans lequel les ménages, tels qui vont être décrits ci-dessous, seront confrontés à des entreprises dans un cadre d'équilibre général.

Les chapitres précédents ont abordé le comportement de consommation sous deux angles très différents. Dans le premier, la quantité de biens consommés lors de chaque période était supposée proportionnelle au revenu, la proportion du revenu consommée étant une constante exogène. C'est l'approche privilégiée par Keynes et qu'il justifiait en se référant à la « loi psychologique fondamentale, à laquelle nous pouvons faire toute confiance, à la fois *a priori* en raison de notre connaissance de la nature humaine et *a posteriori* en raison des enseignements détaillés de l'expérience, c'est qu'en moyenne et la plupart du temps les hommes tendent à accroître leur consommation à mesure que leur revenu croît, mais non d'une quantité aussi grande que l'accroissement de revenu » (*Théorie Générale*, Livre III, Chap. 8, section III).

Ce comportement, qui s'accorde avec le fait stylisé selon lequel la part de la consommation agrégée dans le PIB est caractérisée par une très grande stabilité (elle est de l'ordre de 0,8 en France), se démarque profondément de l'approche qui a été retenue dans le chapitre précédent, dans lequel « choisir le montant de la consommation, c'est choisir s'il faut dépenser de la monnaie maintenant ou la conserver pour financer la consommation dans le futur » (Deaton, *Understanding Consumption*, 1992, chapitre 1). Le comportement de consommation y est présenté comme étroitement lié à la décision d'épargne : si l'on décide de consommer peu aujourd'hui, c'est pour se constituer une épargne qui nous permettra de consommer plus demain.

C'est ce choix que nous allons décrire maintenant. Le chapitre précédent nous a déjà appris que, lorsque les agents vivent durant deux périodes, ils transfèrent une partie de leur revenu d'une période sur l'autre : en général, la quantité consommée ne dépendra pas seulement du revenu courant, puisque le revenu d'hier a été transféré en partie vers la période courante via l'épargne, et que celui de demain peut être utilisé pour rembourser un emprunt qui permet de consommer dès aujourd'hui. C'est donc en principe l'ensemble du revenu que les ménages vont percevoir sur leur cycle de vie qui motive la consommation. Le chapitre précédent nous a également appris que les choix de consommation (et d'épargne) dépendent aussi, et parfois de façon complexe, des prix des facteurs de production au cours du temps.

Dans une perspective de croissance de long terme, nous allons faire abstraction des questions liées à la succession et l'enchevêtrement des générations, et faire comme si la consommation agrégée résultait des choix de ménages vivant arbitrairement longtemps. Dans la même logique, une année particulière et ce qui s'y passe ne sont que peu relativement à l'histoire longue. Pour cela, nous quittons le temps discret des chapitres précédents, et nous lui préfèrerons le temps continu.

2. LES CONTRAINTES DE BUDGET

2.1. Contrainte de budget instantanée

À l'instant t, un ménage tire son revenu de son travail et du stock d'actifs financiers qu'il a accumulé auparavant. Il perçoit le salaire w_t à l'instant t. Ce salaire reste constant sur un petit intervalle de temps de longueur dt ($dt > 0$ arbitrairement petit), c'est-à-dire entre t et $t+dt$. Ainsi, sur cet intervalle de temps $[t, t+dt]$, son revenu du travail s'élève au total à $w_t dt$.

Soit a_t le stock d'actifs dont il dispose à l'instant t. On l'interprète comme résultant des décisions passées de l'individu ; un individu peut avoir accumulé beaucoup dans le passé (de sorte que $a_t > 0$ est grand), peu ($a_t > 0$ est petit), voire s'être endetté ($a_t < 0$). Par conséquent, aujourd'hui en $t = 0$, le stock courant a_0 est une donnée. Si l'on note r_t le taux d'intérêt (réel) à l'instant t, le revenu tiré de la possession du stock a_t sur l'intervalle de temps $[t, t+dt]$ est égal à $r_t a_t dt$. Par hypothèse, le stock a_t reste constant durant l'intervalle de temps de longueur dt.

Le revenu total de l'individu sur le petit intervalle de temps $[t, t+dt]$ s'élève donc à $w_t dt + r_t a_t dt$.

La durée dt devrait être vue comme celle durant laquelle l'ensemble des choix individuels ne peuvent plus être modifiés ; en particulier, toute décision de consommation en t implique une épargne qui ne vient altérer le stock d'actifs financiers que dt unités de temps plus tard.

Avec ce revenu, le ménage peut soit consommer, soit épargner (ou désépargner), c'est-à-dire modifier le stock d'actifs dont il disposera en $t+dt$.

Notons c_t la consommation instantanée, de sorte que la quantité de bien consommée est $c_t dt$ sur l'intervalle de temps $[t, t+dt]$.

Soit s_t son épargne instantanée ($s_t \gtrless 0$), et $s_t dt$ son épargne entre t et $t+dt$. Cette épargne se traduit par une modification du stock d'actifs dont l'individu disposera en $t+dt$: $a_{t+dt} = a_t + s_t dt$. On note $da_t = a_{t+dt} - a_t$ la variation du stock d'actifs entre t et $t+dt$.

Nous pouvons maintenant écrire la contrainte de budget à laquelle le ménage fait face sur l'intervalle de temps $[t, t+dt]$:

$$c_t dt + da_t = r_t a_t dt + w_t dt,$$

ou bien encore, puisque $dt > 0$,

$$c_t + \frac{da_t}{dt} = r_t a_t + w_t.$$

On utilisera la notation $\dot{a}_t = da_t/dt$ pour désigner une dérivée par rapport au temps. Au final, on a donc :

$$c_t + \dot{a}_t = r_t a_t + w_t. \tag{4.1}$$

L'ensemble de budget de l'individu est constitué des suites $(c_t, a_t, t \geqslant 0)$ associées à la condition initiale a_0 et telles que $c_t + \dot{a}_t \leqslant r_t a_t + w_t$. Cette contrainte est saturée dans (4.1). C'est la frontière de l'ensemble de budget du ménage. Elle dépend bien sûr des prix des facteurs de production $(r_t, w_t, t \geqslant 0)$. Dans tout ce qui va suivre, ces prix seront considérés comme des données exogènes ; ils résulteront dans le chapitre suivant des égalités de l'offre et de la demande sur les marchés du capital et du travail.

2.2. Contrainte de budget intertemporelle

La contrainte de budget (4.1) n'a pas la forme habituelle que prend ce type de contrainte dans la théorie élémentaire du consommateur parce qu'elle fait intervenir le niveau d'une variable de choix, mais aussi sa variation. C'est la contrepartie du transfert de revenu au cours du temps. Ce transfert n'est soumis dans le cadre décrit à aucune contrainte (si, par exemple, l'emprunt était interdit à l'individu, on devrait poser en outre $da_t \geqslant 0$). Cette contrainte fait aussi l'hypothèse d'anticipations (de prix) exactes.

Elle peut toutefois s'écrire comme une contrainte de budget d'un problème statique. C'est la contrainte de budget intertemporelle, déjà vue dans le chapitre 3. Pour cela, il suffit de remarquer que (4.1) est une équation différentielle du premier ordre (non homogène) à coefficients variables au cours du temps (cf. éventuellement Barro et Sala-i-Martin, 2004, Annexe A.1.2).

Définissons

$$R_t = \int_0^t r_s ds.$$

Ce terme reviendra très souvent dans la suite du chapitre. Pour en comprendre le sens, supposons que l'individu possède 1 unité d'un actif financier en $t = 0$, qu'il la place sur les marchés financiers, et qu'il la replace ensuite à chaque instant, ainsi que les

intérêts rapportés (au taux d'intérêt réel r_t). Soit δ_t la valeur réelle de ce placement en t. On a : $\delta_{t+dt} = \delta_t + r_t\delta_t dt \Leftrightarrow \dot{\delta}_t = r_t\delta_t$. Ainsi, à une date t quelconque, $\delta_t = \exp(R_t)$: c'est le nombre de biens que l'on obtient en t en renonçant à consommer 1 bien en $t = 0$. C'est le prix relatif du bien en $t = 0$ en terme du bien en t. Cela implique que $1/\exp(R_t) = \exp(-R_t)$ est la somme qu'il faudrait placer aujourd'hui (en 0) pour avoir un bien en t. C'est aussi le prix relatif d'une unité de bien en t en terme du bien d'aujourd'hui ($t = 0$).

Multiplions chaque membre de (4.1) :

$$c_t \exp(-R_t) + \dot{a}_t \exp(-R_t) = r_t a_t (-R_t) + w_t \exp(-R_t).$$

On remarque que :

$$\frac{d}{dt}\left(a_t \exp(-R_t)\right) = \dot{a}_t \exp(-R_t) - r_t a_t \exp(-R_t)$$

$$\Rightarrow c_t \exp(-R_t) + \frac{d}{dt}\left(a_t \exp(-R_t)\right) = w_t \exp(-R_t).$$

En intégrant entre 0 et T, on obtient :

$$\int_0^T c_t \exp(-R_t)\, dt + a_T \exp(-R_t) - a_0 = \int_0^T w_t \exp(-R_t)\, dt.$$

Si l'horizon T de l'individu est fini, et que sa richesse financière nette est nulle lors de cette période, $a_T = 0$, alors l'égalité précédente devient

$$\int_0^T c_t \exp(-R_t)\, dt = a_0 + \int_0^T w_t \exp(-R_t)\, dt. \tag{4.2}$$

On reconnaît la contrainte de budget intertemporelle. Le membre de gauche s'interprète comme une dépense, le prix implicite de la consommation en t étant égal à $\exp(-R_t)$, le nombre de biens auquel il faut renoncer en 0 pour consommer un bien en t. Le membre de droite s'interprète comme la richesse de l'individu. Cette richesse a une composante « financière » et une composante « non financière ». La richesse financière se réduit à la valeur courante du stock d'actifs, a_0. Le terme restant est la richesse non financière, ou « richesse humaine ».

2.3. La contrainte de Ponzi

Si T est arbitrairement grand, on retrouve l'égalité (4.2) lorsque :

$$\lim_{T\to\infty} a_T \exp\left(-\int_0^T r_s ds\right) = 0. \tag{4.3}$$

Cette égalité est connue comme dérivant de la « contrainte de Ponzi ». Charles Ponzi est resté célèbre pour être devenu (temporairement) riche en s'appuyant sur des jeux chaînés. La condition (4.3) peut se lire comme interdisant d'avoir une richesse positive dans le long terme à partir d'une richesse courante nulle. Pour s'en convaincre,

supposons que la richesse financière du ménage soit initialement nulle, $a_0 = 0$, et que ce ménage ne travaille pas, $w_t = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Considérons un sentier de consommation $(c_t, t \geqslant 0)$ quelconque. Ce sentier est-il réalisable en recourant à la dette ?

Le stock d'actifs que le ménage possède en t est a_t ($a_t < 0$). Ce stock évolue de la façon suivante : $da_t = r_t a_t dt - c_t$. Cette équation a une structure similaire à la contrainte de budget du ménage en t. Elle se résoud de la même façon. On obtient :

$$\int_0^T c_t \exp(-R_t) dt = - \lim_{T\to\infty} a_T \exp(-R_T).$$

Le membre de droite est le revenu intertemporel dont disposera le ménage dans le long terme, si sa richesse financière initiale est nulle et s'il ne travaille pas. Si l'on impose la condition de Ponzi,

$$\lim_{T\to\infty} a_T \exp(-R_T) \geqslant 0, \tag{4.4}$$

on impose à l'individu d'avoir dans le long terme une richesse financière positive (du point de vue d'aujourd'hui). On n'impose pas que le ménage ne puisse pas s'endetter temporairement, mais qu'il ne puisse pas le faire de façon permanente.

Pour un ménage faisant face à la contrainte (4.4), laisser cette contrainte non saturée impliquerait une baisse de son revenu intertemporel. Cette contrainte sera donc saturée à l'optimum du ménage. On retrouve (4.3).

3. DEUX APPLICATIONS

3.1. Taxes équivalentes et TVA sociale

Supposons que les salaires soient taxés au taux $\tau_w > 0$ (il est préférable de voir τ_w comme un taux de cotisations sociales, l'impôt sur le revenu étant un prélèvement plus progressif que les cotisations sociales).

Alors, la contrainte de budget à l'instant t s'écrit

$$c_t + \dot{a}_t = r_t a_t + (1 - \tau_v) w_t.$$

Et l'on en déduit la contrainte de budget intertemporelle :

$$\int_0^T c_t \exp(-R_t)\, dt = a_0 + (1 - \tau_w) \int_0^T w_t \exp(-R_t)\, dt. \tag{4.5}$$

Pour τ_w suffisamment petit (proche de 0),

$$\frac{1}{1-\tau_w} \simeq 1 + \tau_w.$$

La contrainte (4.5) peut donc se réécrire :

$$(1+\tau_w) \int_0^T c_t \exp(-R_t)\, dt = (1+\tau_w)\, a_0 + \int_0^T w_t \exp(-R_t)\, dt,$$

ce qui montre qu'imposer le revenu d'activité perçu à chaque instant à un taux constant (au cours du temps), c'est imposer la richesse humaine à ce même taux : *une taxe sur le revenu salarial est équivalente pour le ménage à une taxe identique sur sa consommation et sur sa richesse financière.*

Le même type d'argument s'applique à une taxe sur la consommation. Faisons abstraction des prélèvements effectués sur les revenus d'activité, et supposons maintenant que la consommation soit imposée au taux $\tau_c > 0$. Cette taxe peut s'assimiler à une Taxe sur la Valeur Ajoutée (TVA). *La TVA est équivalente pour le ménage à une taxe (de même montant) portant sur sa richesse totale, financière et humaine.*

Nous avons discuté dans le chapitre précédent une politique de TVA sociale, qui conjugue une baisse des cotisations sociales et une hausse de la TVA. Les deux propriétés d'équivalence montrent qu'une hausse de la TVA est équivalente à une taxe plus lourde sur la richesse financière et la richesse humaine ; une baisse des cotisations est quant à elle équivalente à une baisse des taxes pesant sur la consommation, et simultanément à une baisse de la subvention (implicite) de la richesse financière. On s'attend donc à ce que la TVA sociale se traduise au final par une taxe plus lourde sur la seule richesse financière, c'est-à-dire sur le capital des ménages existant au moment où elle est mise en place.

Il est facile de le vérifier. Lorsque les salaires sont taxés au taux τ_w (cotisations sociales) et la consommation au taux τ_c (TVA), la contrainte de budget intertemporelle devient

$$(1+\tau_c)\int_0^T c_t \exp(-R_t)\,dt = a_0 + (1-\tau_w)\int_0^T w_t \exp(-R_t)\,dt.$$

Divisons chaque membre par $(1+\tau_c)$. Considérons une substitution un pour un ($d\tau_c = -d\tau_w > 0$). En pratique, l'assiette des cotisations est plus étroite que celle de la consommation, de sorte qu'une mesure maintenant le prélèvement total constant s'accompagnerait en fait d'une hausse du taux de TVA bien moindre que la baisse du taux de cotisations. Pour τ_c et τ_w initialement proches de 0, on obtient :

$$\frac{1-\tau_w}{1+\tau_c} \simeq 1 - d\tau_w - d\tau_c = 1, \quad \frac{1}{1+\tau_c} = 1 - d\tau_c$$

$$\Rightarrow \int_0^T c_t \exp(-R_t)\,dt = (1-d\tau_c)\,a_0 + \int_0^T w_t \exp(-R_t)\,dt.$$

Dans ce cadre, la TVA sociale s'apparente pour le ménage à une taxe sur sa richesse financière, au moment où elle est mise en œuvre.

3.2. Équivalence ricardienne

La politique budgétaire est susceptible d'avoir des effets très différents dans le cadre de court terme du modèle IS-LM et dans celui que nous sommes en train d'examiner, notamment parce que l'horizon sur lequel s'appuient les agents lorsqu'ils doivent prendre une décision courante est très court. En particulier, la loi psychologique

fondamentale postule un comportement d'épargne très passif parce qu'il ne répond pas à l'anticipation que les agents forment sur ce qui se passera au moment où seront perçus les revenus de l'épargne. De ce point de vue, le financement d'une dépense publique devrait affecter en profondeur la décision d'épargne : une dépense publique financée par l'impôt ampute le revenu net courant tandis qu'un financement par endettement remet à plus tard le moment où la taxe pénalisera le revenu des agents. Le désir de lissage de la consommation nous conduit à prédire que les agents épargneront plus si l'État s'endette, ce qui devrait amoindrir l'effet de relance la la demande agrégée.

Examinons comment la contrainte de budget intertemporelle dépend du mode de financement de la politique budgétaire. Supposons que cette politique consiste en un achat de biens par l'État : l'État achète g biens à chaque instant entre t_1 et t_2.

Une première alternative qui est offerte à l'État consiste à financer cette dépense par un impôt $\tau = g$ à chaque instant entre t_1 et t_2.

Pour tout $t < t_1$ ou $t > t_2$, la contrainte de budget du ménage s'écrit comme précédemment, à savoir $c_t + \dot{a}_t = r_t + w_t$.

Entre t_1 et t_2, le ménage paye τ durant chaque petit intervalle de temps $[t, t + dt]$. Sur ce petit intervalle de temps, la contrainte de budget instantanée devient donc :

$$c_t + \dot{a}_t = r_t + w_t - \tau.$$

Après avoir multiplié chaque terme par $\exp(-R_t)$ et intégré entre t_1 et t_2, on constate que la politique publique se solde pour le ménage par une perte de revenu intertemporel égale à :

$$\int_{t_1}^{t_2} \tau \exp(-R_t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} g \exp(-R_t)\,dt,$$

l'égalité suivant de $\tau = g$. Le revenu intertemporel, évalué du point de vue de la période courante $t = 0$, baisse de la valeur présente de l'impôt que l'agent devra payer (la somme $\tau \exp(-R_t)$ est la quantité de biens à laquelle le ménage doit renoncer aujourd'hui pour « consommer » τ biens en t).

Qu'en serait-il si l'État décidait d'utiliser à la fois l'impôt et la dette (publique) ? Cette alternative pour l'État implique qu'il n'est plus nécessaire de faire coïncider la dépense publique et l'impôt prélevé. Notons (τ_t) l'évolution de l'impôt au cours du temps. Pour pouvoir rapprocher cette nouvelle modalité de financement de la précédente, supposons que l'État n'intervient dans l'économie qu'entre t_1 et t_2 : avant t_1, l'État ne prélève pas d'impôt ($\tau_t = 0$ pour $t < t_1$) et ne recourt pas à la dette ($b_t = 0$ pour $t < t_1$) ; il en est de même après t_2 (en particulier, toute dette émise a été intégralement remboursée en t_2, de sorte que $b_{t_2} = 0$). Pour tout $t \in [t_1, t_2]$,

$$db_t = r_t b_t dt + (g - \tau_t)dt \Leftrightarrow \dot{b}_t = r_t b_t + (g - \tau_t).$$

En t, l'État a accumulé une dette b_t. Entre t et $t+dt$, il doit payer les intérêts sur cette dette, $r_t b_t dt$ pour un taux d'intérêt instantané r_t égal à celui auquel le ménage fait face. Il doit également rembourser sa dette b_t. Il fait donc face à un besoin de financement égal à $r_t b_t dt + b_t$. Il s'agit du « service de la dette ». Ce n'est pas le seul besoin de financement qu'il doit couvrir : à l'instant t, il a choisi de prélever l'impôt τ_t (qui reste fixé sur le petit intervalle de temps $[t, t+dt]$) mais il dépense g par hypothèse. Son déficit primaire s'élève donc à $(g-\tau_t)dt$. C'est la nouvelle dette b_{t+dt} émise en $t+dt$ qui permet à l'État de s'acquitter de ses obligations. La contrainte de budget instantanée précédente en découle, avec une variation de la dette publique entre t et $+dt$ notée $db_t \equiv b_{t+dt} - bt$.

En intégrant entre t_1 et t_2, on obtient :

$$b_{t_2}\exp(-R_{t_2}) - b_{t_1}\exp(-R_{t_1}) = \int_{t_1}^{t_2}(g-\tau_t)\exp(-R_t)dt.$$

En t_1, la dette publique est nulle ; en t_2, elle doit avoir disparu. Il s'ensuit que l'on doit avoir :

$$\int_{t_1}^{t_2} g\exp(-R_t)dt = \int_{t_1}^{t_2}\tau_t\exp(-R_t)dt. \tag{4.6}$$

Il est possible que le volume de la dépense ne coïncide pas avec le volume de l'impôt à un instant donné. Mais, au final, la dépense est financée par l'impôt : toute dette courante implique un impôt futur.

La dette publique et l'actif utilisé par le ménage pour transférer son revenu au cours du temps en l'absence de dette publique, dont le rendement est le taux d'intérêt réel r (bien que la sphère productive n'ait pas encore été décrite, les chapitres précédents vous laissent deviner qu'il s'agira du capital) ont par hypothèse tous les deux le même rendement. Le ménage est donc indifférent entre ces deux actifs ; il les utilisera indifféremment et le stock agrégé qu'il détient en t est a_t. Pour le ménage, la seule conséquence explicite de la politique publique passe donc par l'impôt : pour tout t entre t_1 et t_2, la contrainte de budget instantanée du ménage s'écrit

$$c_t + \dot{a}_t = r_t + w_t - \tau_t.$$

Elle est analogue à celles auxquelles il faisait face en l'absence de dette publique, encore une fois parce que la dette n'y apparaît qu'implicitement comme composante du stock d'actifs a du ménage. Le revenu intertemporel (du point de vue de la période 0) baisse donc finalement de la valeur actualisée de l'impôt total prélevé,

$$\int_{t_1}^{t_2}\tau_t\exp(-R_t)dt = \int_{t_1}^{t_2} g\exp(-R_t)dt,$$

où la dernière inégalité suit de (4.6).

Le revenu intertemporel de l'agent est donc indépendant du mode de financement de la politique fiscale, par la dette ou par l'impôt. Ses choix de consommation le seront donc aussi : la politique budgétaire aura le même effet quel que soit son mode de financement. C'est l'équivalence ricardienne. Bien que le montant du revenu

intertemporel soit le même, que l'État utilise la dette publique ou non, le mode de financement influence le moment où les revenus sont perçus : comme nous venons de voir que les choix de consommation sont indépendants du mode de financement de la dépense publique, c'est donc l'épargne qui doit répondre au mode de financement de cette dépense. Si le taux d'intérêt est vu comme le prix qui équilibre le marché de l'épargne, il semble possible que le taux d'intérêt réel d'équilibre réponde au mode de financement. Face au même système de prix, cette section vient de montrer que le comportement de consommation est indépendant du montant de dette publique émise (tant qu'elle est finalement remboursée intégralement et disparaît). Cependant si le système de prix d'équilibre changeait du fait de la dette publique, cette propriété ne serait pas aussi forte que cette section peut le laisser paraître. Nous reviendrons sur ce thème dans le chapitre 5.

4. LA CONSOMMATION OPTIMALE

4.1. Le problème du ménage

Les préférences du ménage sont représentées par une fonction d'utilité

$$\int_0^T u(c_t)\exp(-\rho t), \tag{4.7}$$

avec $u' > 0$, $u'' < 0$, $\rho > 0$. L'utilité (4.7) représente le bien-être dégagé sur un intervalle de temps $[0, T]$ lorsque l'agent consomme c_t à l'instant t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Les préférences sont séparables au cours du temps : l'utilité dégagée en consommant c_t unités d'un bien agrégé en t est indépendante de la consommation passée et de la consommation future. On ne prend pas en compte par exemple une forme d'habitude qui ferait qu'un consommateur en t voit son bien-être lors de cette période influencé directement par le niveau de sa consommation passée.

Enfin, cette utilité est évaluée du point de vue de la date $t = 0$. Pour le comprendre, remarquons que l'utilité dégagée en t est pondérée par le facteur $\exp(-\rho t)$. Il est tentant d'interpréter ce point comme un facteur d'actualisation : si le temps s'écoulait en temps discret, l'utilité dégagée en t serait $u(c_t)$ lorsqu'elle est évaluée en t, $\beta u(c_t)$ lorsqu'elle est évaluée en $t-1$, et $\beta^t u(c_t)$ lorsqu'elle est évaluée en 0. Le paramètre β est le facteur d'escompte sur une unité de temps discrète. Il peut s'écrire aussi $\beta \equiv 1/(1+\theta)$ par définition du taux d'escompte θ. Le taux d'escompte représente le nombre d'unités d'utilité auquel l'agent est prêt à renoncer pour obtenir une unité d'utilité supplémentaire lors de la période suivante. Pour θ suffisamment petit (proche de 0), on a au premier ordre $\beta^t = (1+\theta)^{-t} \simeq 1-\theta t$. Mais, toujours pour θ petit, $\exp(-\theta t) \simeq 1-\theta t$. Par conséquent, $\exp(-\theta t)$ s'interprète comme un facteur d'actualisation lorsque le taux de préférence est suffisamment proche de 0, c'est-à-dire lorsque l'agent éprouve une préférence pour le présent. Le débat récent concernant la mesure de la perte de bien-être subie par les générations futures du fait du réchauffement climatique a mis en lumière l'importance du taux d'escompte. Le poser à 0,1 % a été très souvent jugé trop bas : entre 1,5 % et 2 % semble être un bon compromis.

Le problème du ménage est de choisir une trajectoire de consommation et d'épargne $(c_t, a_t, t \geqslant 0)$ qui maximise (4.7) sous la contrainte (4.2). Notez que cela suppose que la richesse financière du ménage (évaluée du point de vue de la période courante) n'est pas négative lors de la dernière période T.

Soit λ le multiplicateur de Lagrange associé à (4.2). Le Lagrangien du problème du ménage s'écrit

$$\int_0^T u(c_t)\exp(-\rho t) + \lambda\left(a_0 + \int_0^T w_t \exp(-R_t)\,dt - \int_0^T c_t \exp(-R_t)\,dt\right).$$

La condition nécessaire du premier ordre par rapport à c_t s'écrit :

$$u'(c_t)\exp(-\rho t) = \lambda \exp(-R_t). \tag{4.8}$$

Lorsque l'agent renonce à consommer une unité de bien en t, il éprouve une désutilité marginale $u'(c_t)$ en t, soit $u'(c_t)\exp(-\rho t)$ mais cela lui permet d'obtenir une unité de revenu supplémentaire lors de cette période. La valeur d'une unité de revenu est $\lambda \exp(-R_t)$.

Dans la suite de cette section nous allons exploiter cette condition du premier ordre pour décrire les déterminants du niveau et de l'évolution de la consommation au cours du temps.

4.2. L'évolution de la consommation

La condition du premier ordre (4.8) est valable quel que soit t. En la différentiant par rapport au temps, on obtient

$$-\frac{c_t u''(c_t)}{u'(c_t)}\frac{\dot{c}_t}{c_t} = r_t - \rho. \tag{4.9}$$

Soit $\sigma(c_t) = -u'(c_t)/c_t u''(c_t) > 0$. On reconnaît ici l'inverse du coefficient relatif d'aversion pour le risque. Nous reviendrons plus longuement dans le chapitre suivant sur la signification de ce paramètre. Notons simplement pour l'instant qu'il mesure la concavité de la fonction u. La condition (4.9) montre qu'il influence la réaction du taux de croissance de la consommation $\dot{c}_t/c_t$ à un changement du taux d'intérêt réel. Lorsque cette fonction est peu concave (σ est grand), une variation de prix au cours du temps va s'accompagner de changements importants de la consommation au cours du temps. Cela montre que, pour σ grand, le ménage est disposé à substituer facilement de la consommation à deux instants différents. Il sera plus réticent à le faire lorsque la fonction u devient plus concave : une petite modification de la consommation permet alors d'ajuster le taux marginal de substitution lorsque les prix changent. Avec ce paramètre, l'égalité précédente devient :

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = (r_t - \rho)\sigma(c_t). \tag{4.10}$$

Cette équation est connue comme étant « l'équation d'Euler » ou bien aussi l'équation de « Ramsey-Keynes ». Elle lie le taux de croissance de la consommation sur un

intervalle d'une unité de temps à la différence entre le taux d'intérêt réel r_t et le taux de préférence pour le présent ρ.

Si $\sigma(c_t) > 0$, la consommation augmente (au cours du temps) lorsque le taux d'intérêt réel est supérieur au taux de préférence pour le présent ; elle baisse si le taux d'intérêt réel est inférieur au taux de préférence pour le présent ; elle reste constante dans le cas où ces deux taux coïncident.

L'équation de Ramsey-Keynes s'interprète facilement : si le taux d'intérêt est élevé, le consommateur est incité à réduire sa consommation courante, épargner et consommer plus dans le futur, de sorte que sa consommation augmente bien au cours du temps. De la même façon, lorsque le taux de préférence pour le présent est faible, le consommateur est plus disposé à renoncer à consommer aujourd'hui pour consommer plus demain.

L'ampleur de la substitution de la consommation courante à la consommation future dépend du coefficient $\sigma(c_t)$. Comme attendu, lorsque σ est proche de 0, le ménage est très réticent à l'idée de compenser une baisse de sa consommation courante par une consommation plus importante dans le futur. Il va donc choisir de maintenir sa consommation à peu près constante au cours du temps. Si σ est plus grand, le ménage devient plus disposé à exploiter les différences entre le taux d'intérêt réel (le nombre de biens qu'il pourra consommer en plus demain s'il renonce à consommer aujourd'hui) et son taux de préférence pour le présent.

Certains économistes (cf. Hall, 1989) défendent le point de vue selon lequel il devrait y avoir peu de lien entre l'attitude du consommateur face au risque et sa disposition à substituer de la consommation au cours du temps. Ils recommandent pour cette raison de ne pas s'appuyer sur les modèles qui font apparaître une connection trop étroite entre ces deux aspects du comportement individuel. L'intuition peut parfois suggérer le contraire : si l'on reporte facilement de la consommation vers le futur, on s'expose plus, lorsque l'incertitude est prise en compte, au risque.

4.3. Le niveau de la consommation

Nous savons maintenant comment la consommation varie au cours du temps. Il nous reste à déterminer son niveau. Pour cela, nous allons supposer que $\sigma(c_t) = \sigma$. Bien que l'estimation de ce paramètre, qui joue un rôle crucial dans la relation qui unit le taux d'intérêt, l'épargne et la consommation, ait fait l'objet de très nombreuses études, la communauté est loin d'avoir atteint un consensus. Les études d'Attanasio et Weber (1993), ou celle de Browning et Lusardi (1996), qui sont souvent citées en référence, concluent à une élasticité de substitution faible, inférieure à 1. S'il n'y a pas de consensus sur le niveau de cette élasticité, on se doute que l'on est loin de savoir comment la consommation pourrait l'affecter ! Lorsque ce paramètre est supposé constant, l'équation différentielle (4.10) se résout très simplement :

$$\ln c_t - \ln c_0 = \sigma \int_0^t (r_s - \rho)\, ds = \sigma(R_t - \rho t)$$

$$\Leftrightarrow c_t = c_0 \exp(\sigma(R_t - \rho t)).$$

Le niveau de la consommation courante c_0 est alors obtenu en remplaçant c_t par son expression en fonction de c_0 dans la contrainte de budget intertemporelle (4.2) :

$$c_0 \int_0^T \exp(\sigma(R_t - \rho t) - R_t) dt = a_0 + \int_0^T w_t \exp(-R_t)\, dt \equiv W_0, \tag{4.11}$$

où W_0 est la « richesse « totale du consommateur en $t = 0$. La consommation est proportionnelle à sa richesse W_0 et non pas, comme attendu, à son seul revenu courant : $c_t = \alpha_t W_0$, où

$$\frac{1}{\alpha_0} = \int_0^T \exp(\sigma(R_t - \rho t) - R_t) dt.$$

La contrainte (4.2) montre qu'en $t = 0$, le « prix implicite » du bien de consommation en t est $\exp(-R_t)$. Il est décroissant avec le taux d'intérêt. Nous avons décrit dans le chapitre 3 comment les comportements de consommation et d'épargne sont affectés par une modification du taux d'intérêt. Ici, une hausse de R_t a trois types d'effets :

1. à richesse donnée (c'est-à-dire, étant donné le revenu intertemporel du ménage), une hausse du taux d'intérêt induit un effet de substitution et un effet de revenu.
   (a) Effet de substitution. Le prix relatif du bien consommé en t diminue par rapport à celui du bien que l'on consommerait aujourd'hui. Il en résulte une hausse de la consommation désirée en t et une baisse de la consommation courante, soit une baisse de la propension marginale α_0 à consommer la richesse.
   (b) Effet de revenu. La baisse du prix d'un bien se traduit par une hausse du pouvoir d'achat du ménage (toujours à richesse, ou revenu intertemporel, donnée). Si le bien de consommation est normal, la consommation doit augmenter à la fois aujourd'hui (en 0) et en t. Il s'ensuit que α_0 doit cette fois augmenter. L'effet de revenu s'oppose à l'effet de substitution, ce qui rend la réaction de la consommation (et de l'épargne) au taux d'intérêt incertaine.
2. La richesse est elle-même affectée directement par la hausse du taux d'intérêt : cette dernière vient réduire la valeur réelle courante des salaires que le ménage anticipe percevoir dans le futur. Si les biens de consommation sont normaux, la consommation doit baisser lors de chaque période au travers de cet « effet de richesse ».

Lorsque le taux d'intérêt R_t augmente, la propension marginale à consommer α_0 baisse par l'effet de substitution, augmente par l'effet de revenu ; la richesse W_0 baisse, ce qui vient exercer une pression à la baisse sur la consommation. Au total, l'effet de substitution et l'effet de richesse s'opposent à l'effet de revenu. L'expression de la propension α_0 (à consommer la richesse W_0) nous donne un critère simple pour savoir lequel de l'effet de substitution et de l'effet de revenu est dominant. On constate en effet qu'une hausse de R_t se solde par une hausse de α_0 si et seulement $\sigma < 1$. L'effet de substitution est donc dominant si et seulement si $\sigma > 1$; l'effet de revenu est dominant sinon. Pour $\sigma = 1$ (la fonction d'utilité u est Cobb-Douglas), l'effet de substitution

et l'effet de revenu se compensent exactement. Ces propriétés sont assez intuitives : lorsque σ est grand (resp. petit), le ménage est très (peu) disposé à substituer de la consommation présente à de la consommation future si le prix relatif de cette dernière augmente.

Les estimations de l'élasticité de substitution données plus haut suggèrent que σ est petit, et en général on considère qu'il est inférieur à 1. L'effet de substitution serait donc dominé par l'effet de revenu en pratique. Si la richesse du ménage ne variait pas lorsque le taux d'intérêt réel change, une hausse du taux d'intérêt futur se traduirait par une consommation courante plus grande et donc par une épargne courante plus faible. Cette propriété ne se retrouve en général pas dans les faits : la consommation répond faiblement, mais négativement, à une hausse du taux d'intérêt (Campbell et Mankiw, 1989). Dans notre cadre, l'effet de richesse pourrait dominer l'effet net qui subsiste de la confrontation de l'effet de substitution et de l'effet de revenu.

4.4. Cycle de vie et revenu permanent

Supposons que le taux d'intérêt est constant et qu'il est égal au taux de préférence pour le présent : $r_t = r = \rho$. Alors $R_t = r\,t = \rho\,t$ et

$$\frac{1}{\alpha_0} = \int_0^T \exp(-r\,t)\,dt = \frac{1-\exp(-r\,T)}{r} \to \frac{1}{r}$$

quand $T \to \infty$. Il s'ensuit que, lorsque l'horizon sur lequel le ménage choisit sa consommation et son épargne est suffisamment long, sa consommation reste constante : $c_0 = c_t = r\,W_0$. La somme $r\,W_0$ représente l'intérêt que le ménage obtient en plaçant sa richesse W_0 au taux r. C'est donc la somme que le ménage peut consommer lors de chaque période sans amputer sa richesse totale W_0. On reconnaît ici le « revenu permanent ». Nous sommes ici très loin de la fonction de consommation postulée par Keynes et obéissant à la loi psychologique fondamentale. Les fluctuations du revenu au cours du temps ne sont en effet pas répercutées dans celles de la consommation : le ménage, par ses opérations de prêt et d'emprunt, parvient à maintenir une consommation constante.

Dans la version la plus simple du modèle de cycle de vie, la richesse financière des ménages est nulle, et les ménages perçoivent un salaire constant durant la première partie de leur vie et s'arrêtent de travailler ensuite. Puisque la consommation est constante, les agents épargnent durant leur vie active, et désépargnent ensuite, jusqu'à consommer l'intégralité de leur revenu. Supposons qu'à chaque date naît une nouvelle génération identique aux précédentes : en l'absence de croissance démographique, il y a à un instant donné une génération en première période de vie qui consomme $c_0 = \alpha_0 W_0$, une génération en deuxième période de vie qui consomme $c_1 = \alpha_1 W_0$, etc. jusqu'à la génération en dernière période de vie qui consomme $c_T = \alpha_T W_0$. À chaque instant, la consommation agrégée doit donc être égale à W_0 : l'épargne nette est nulle ; la désépargne des plus vieilles générations coïncide avec l'épargne des plus jeunes. Pour un taux de préférence ρ

posé à 0 en première approximation, on a $c_t = W_0/T$ de sorte que la consommation agrégée

$$\int_{t-T}^{t} c_\tau d\tau = T(W_0/T) = W_0.$$

L'épargne nette devient positive si la population croît et/ou si la productivité (du travail) croît. Pour un taux de croissance démographique n (il y a donc $\exp(nt)$ individus qui naissent en t) et une croissance de la productivité g (le salaire constant de la génération t est égal à $\exp(gt)$, le salaire constant perçu tout au long de la vie active, disons jusqu'à l'âge R de la retraite, par la génération née en 0 étant normalisé à 1), la consommation agrégée à l'instant t devient

$$C_t \equiv \int_{t-T}^{t} \frac{R\exp(g\tau)}{T}\exp(n\tau)d\tau$$

tandis que le revenu agrégé à cet instant est le salaire total perçu par les générations actives,

$$Y_t \equiv \int_{t-R}^{t} \exp(g\tau)\exp(n\tau)d\tau.$$

On a bien $C_t = Y_t = R$ si $n = g = 0$. Plus généralement, la propension marginale à consommer à l'instant t est donc

$$\frac{C_t}{Y_t} = \frac{1-(\exp(n+g))^{-T}}{1-(\exp(n+g))^{-R}}\frac{R}{T}.$$

La propension à consommer ne dépend que de la somme $n+g$, elle est bien égale à 1 pour $n+g=0$ (en appliquant la règle de L'Hospital), et elle décroît avec $n+g$. Ce résultat est intuitif : la croissance (démographique ou économique) fait qu'il y a plus de jeunes, et qu'ils sont plus riches que leurs parents au même âge, de sorte qu'ils prennent leurs décisions d'épargne sur une échelle plus grande, ; or ce sont les jeunes qui épargnent.

La propriété de constance de la consommation au chapitre du cycle de vie s'obtient directement à partir de la condition du premier ordre (4.8), avec $\exp(-\rho t) = \exp(-R_t)$. Puisque le multiplicateur λ est associé à la contrainte de budget intertemporelle, il reste constant au cours du temps, et donc l'utilité marginale de la consommation est également constante. Il est peut-être plus plausible que l'utilité instantanée varie avec certaines caractéristiques du ménage : l'âge des personnes qui composent le foyer, le nombre de ces personnes, leur état de santé, etc. Pour prendre en compte ce type de dépendance, on peut écrire l'utilité instantanée comme fonction de la consommation et d'un vecteur z_t de caractéristiques, susceptibles de changer au cours du temps. La condition (4.8) s'écrit dans ce cas $u'(c_t; z_t) = \lambda$. Supposons par exemple que l'utilité marginale de la consommation soit d'autant plus forte que le ménage comprend de personnes. Puisque $u'' < 0$, la consommation doit donc augmenter avec le nombre de personnes dans le foyer : les jeunes couples consomment moins que les familles avec enfants, et ces dernières consomment plus que les foyers âgés. De même, si l'utilité marginale de la consommation à un instant donné est croissante avec l'âge, les jeunes couples consommeront moins que les couples plus âgés.

5. ANNEXE

5.1. L'hypothèse d'agent représentatif

Dans ce chapitre, nous avons décrit le comportement d'épargne et de consommation d'un ménage. Dans les chapitres suivants, nous supposerons en général que l'épargne et la consommation agrégées sont le fait d'un seul ménage qui représenterait l'ensemble des ménages dans l'économie : nous ferons « l'hypothèse d'agent représentatif ». Négliger l'hétérogénéité individuelle semble *a priori* difficile à accepter. L'objet de cette annexe est de discuter cette hypothèse.

Supposons que les ménages ne diffèrent que selon leurs préférences ; ils font face aux mêmes prix et ils ont le même revenu (financier et humain). Les préférences du ménage h, $h \in H$, sont représentées par la fonction d'utilité

$$\int_0^T u_h(c_t^h) \exp(-\rho^h t).$$

Les ménages diffèrent ainsi selon leurs goûts à un instant donné (au travers de la fonction u_h) et selon leur préférence pour le présent (au travers de ρ_h).

La condition du premier ordre (4.8) relative à la consommation du ménage h en t s'écrit :

$$u_h'(c_t^h) \exp(-\rho^h t) = \lambda^h \exp(-R_t),$$

où λ_h est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de budget intertemporelle de ce ménage (il représente ainsi le supplément d'utilité que le ménage retirerait à l'optimum s'il disposait d'une unité de richesse supplémentaire, par exemple une unité de richesse financière supplémentaire lors de la période initiale ou bien d'un supplément de salaire égal à $\exp(R_t)$ en t).

Soit c_t la consommation moyenne. On peut faire l'hypothèse d'agent représentatif lorsque l'on peut trouver des préférences (une fonction d'utilité u et un taux d'escompte ρ) telles qu'un ménage doté de ces préférences, faisant face au même vecteur de prix que les ménages $h \in H$ et disposant de leur richesse financière moyenne, choisirait de consommer un indice c_t de la consommation agrégée, par exemple la consommation moyenne. Pour cela il est nécessaire que c_t soit telle que

$$u'(c_t) \exp(-\rho t) = \lambda \exp(-R_t).$$

Cette relation définit l'indice c_t.

Il est possible que cette propriété soit satisfaite. Les préférences du ménage représentatif peuvent toutefois nous réserver quelques surprises : dans la suite du chapitre, un simple processus d'introspection qui consisterait à se mettre à la place de l'agent représentatif pour savoir par exemple ce que pourrait être une mesure « raisonnable » de l'ampleur de la substitution intertemporelle de la consommation agrégée pourra nous révéler quelques surprises !

Pour s'en convaincre, considérons le cas où il y a un nombre discret de ménages, H. Supposons qu'ils ont tous les mêmes préférences : peut-on décrire leur comportement agrégé en se référant à un ménage représentatif ? Si tel est le cas, ce ménage

aura-t-il les mêmes préférences que chacun des ménages qui composent effectivement la société ?

La consommation individuelle est alors la même pour tous les ménages :

$$u'(c_t^h)\exp(-\rho t) = \lambda \exp(-R_t) \rightarrow c_t^h = c_t$$

pour tout h. Ici, c_t coïncide avec la consommation moyenne dans l'économie. Sommons ces H conditions du premier ordre :

$$\frac{1}{H}\sum_h u'(c_t^h)\exp(-\rho t) = \lambda \exp(-R_t).$$

Un candidat naturel au titre de ménage représentatif est celui d'un ménage ayant les mêmes préférences que celles des ménages. Dans ce cas, l'indice de consommation agrégée C_t doit être tel que :

$$u'(C_t) = \frac{1}{H}\sum_h u'(c_t^h).$$

Cet indice satisfait bien (4.8).

Si u' est convexe, on a :

$$u'(C_t) = \frac{1}{H}\sum_h u'(c_t^h) > u'\left(\frac{1}{H}\sum_h c_t^h\right) = u'\left(c_t^h\right) = u'(c_t).$$

Comme $u'' < 0$, $C_t < c_t$. L'indice de consommation pertinent C_t est supérieur à la consommation individuelle c_t de chacun des ménages : le ménage représentatif consomme en moyenne plus que chacun des ménages dans l'économie !

6. EXERCICES ET PROBLÈMES

6.1. Impôt et dette

Pour vous familiariser avec la contrainte de budget intertemporelle, reprenez le cadre retenu pour présenter la propriété d'équivalence ricardienne. Nous avons supposé que l'État intervenait uniquement entre t_1 et t_2. Écrivez la contrainte que l'on obtiendrait si l'État décidait d'utiliser la dette sur un intervalle de temps $[t_1, \tilde{t}_2]$ où $\tilde{t}_2 > t_2$ (alors que l'impôt n'est utilisé que jusqu'en t_1). Comment évolue alors la dette entre t_2 et $\tilde{t}_2$? Qu'en est-il de la propriété d'équivalence ricardienne : face à un système de prix donné, les choix de consommation du ménage seront-ils affectés par la dette ?

6.2. Consommation et cycle de vie

Un individu vit $T+1$ périodes ($t = 0, 1, ..., T$) au chapitre desquelles il perçoit des revenus y_t et consomme c_t. Son utilité intertemporelle est

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t),$$

où $u(.)$ est la fonction d'utilité instantanée croissante concave et $\beta \in]0,1[$ est le facteur d'escompte du futur.

On désigne par A_t sa richesse à la fin de la période t :

$$A_t = (1+r)A_{t-1} + y_t - c_t,$$

où r est le taux d'intérêt. L'agent naît sans patrimoine : $A_{-1} = 0$; et il doit s'acquitter de ses dettes avant de mourir : $A_T \geqslant 0$.

1. Déterminez la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent.
2. Définissez le revenu permanent.
3. Écrivez le programme de l'agent. Déterminez le profil de sa consommation au chapitre de sa vie et discutez selon la valeur de $\beta(1+r)$.

Dans les deux exemples suivants, l'agent travaille quand il est jeune puis prend sa retraite : $y_t = y > 0$ pour $t = 0,...,N$ et $y_t = 0$ pour $t = N+1,...,T$.

4. En considérant le cas particulier $\beta(1+r) = 1$, déterminez la consommation, l'épargne et la richesse de l'agent à chaque date.
5. En considérant une fonction d'utilité CES,

$$u(c) = \frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}} c^{1-\frac{1}{\sigma}}, \qquad \sigma > 0, \quad \sigma \neq 1,$$

et en prenant $T = 1$ et $N = 0$, déterminez l'effet du taux d'intérêt sur l'épargne et discutez selon la valeur de σ.

Faisons maintenant abstraction des retraites : $y_t = y$ pour $t = 0,...,T$, et on considère à nouveau la fonction d'utilité CES.

6. Calculez les c_t. Comparez à la théorie keynésienne de la consommation.

1. Un économètre se place en $t = 0$ et estime la fonction de consommation keynésienne

$$c_0 = \gamma y_0$$

sur un ensemble d'individus qui diffèrent par leur revenu y. On lui demande l'impact d'un transfert $\Delta G > 0$ vers l'agent en $t = 0$; il répond que la consommation augmente en $t = 0$ de

$$\frac{\sum_{t=0}^{T}(1+r)^{-t}}{\sum_{t=0}^{T}\beta^{\sigma t}(1+r)^{(\sigma-1)t}}\Delta G.$$

7. Qu'en pensez-vous ?
8. Quelles limites ce modèle place-t-il à l'efficacité de la politique budgétaire ?

Éléments de correction

1. On empile les $T+1$ contraintes budgétaires,

$$\begin{aligned}
A_0 &= (1+r)A_{-1} + y_0 - c_0 \\
A_1 &= (1+r)A_0 + y_1 - c_1 && \left(\times \tfrac{1}{1+r}\right) \\
A_2 &= (1+r)A_1 + y_2 - c_2 && \left(\times \tfrac{1}{(1+r)^2}\right) \\
&\vdots \\
A_T &= (1+r)A_{T-1} + y_T - c_T && \left(\times \tfrac{1}{(1+r)^T}\right)
\end{aligned}$$

   et on les somme :

$$\frac{A_T}{(1+r)^T} = (1+r)A_{-1} + \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t - c_t}{(1+r)^t}.$$

   En utilisant $A_{-1} = 0$ et $A_T \geqslant 0$, on obtient

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} \leqslant \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t}.$$

2. Le revenu permanent y_p est le revenu constant au cours du temps qui procure le même revenu total actualisé que le vrai flux de revenus, c'est-à-dire

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{y_p}{(1+r)^t},$$

   soit

$$y_p = \frac{1 - \frac{1}{1+r}}{1 - \frac{1}{(1+r)^{T+1}}} \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t}.$$

3. L'agent choisit chacune de ses consommations de façon à maximiser son utilité intertemporelle, sous sa contrainte de budget intertemporelle :

$$\begin{aligned}
\max_{\{c_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}} \quad & \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t), \\
\text{s.c.} \quad & \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} \leqslant \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t}.
\end{aligned}$$

   On écrit le Lagrangien

$$\mathscr{L} = \sum_{t=0}^{T} \left(\beta^t u(c_t) + \lambda \frac{y_t - c_t}{(1+r)^t} \right).$$

   On a $T+1$ conditions du premier ordre,

$$\beta^t u'(c_t) - \lambda \frac{1}{(1+r)^t} = 0, \qquad t = 0, \ldots, T.$$

On ne cherche pas ici à résoudre complètement le programme en déterminant λ, mais uniquement à obtenir le profil de la consommation :

$$c_t = (u'^{-1}\left(\frac{\lambda}{(\beta(1+r))^t}\right).$$

La consommation croît au cours du temps si $\beta(1+r) > 1$, et décroît sinon. L'intuition est la suivante : l'agent épargne pour consommer plus tard lorsque le taux d'intérêt est élevé (l'épargne rapporte) et que son facteur d'escompte est grand (il valorise le futur).

4. Lorsque $\beta(1+r) = 1$, la consommation est constante au cours du temps : $c_t = c$. La contrainte budgétaire implique alors que c est égale au revenu permanent y_p. L'agent épargne $y - y_p$ à chaque période de sa jeunesse, et désépargne y_p à chaque période de sa vieillesse. Sa richesse augmente jusqu'en $t = N$, puis diminue jusqu'à 0 en $t = T$.

5. L'élasticité de substitution intertemporelle de cette fonction d'utilité CES est σ (d'où le nom *Constant Elasticity of Substitution*)[1]. L'épargne s est choisie pour maximiser :
$$\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}(y_0 - s)^{1-\frac{1}{\sigma}} + \beta\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}((1+r)s)^{1-\frac{1}{\sigma}}.$$
La condition du premier ordre s'écrit :
$$-(y_0 - s)^{-\frac{1}{\sigma}} + \beta(1+r)((1+r)s)^{-\frac{1}{\sigma}} = 0,$$
ce qui donne :
$$s = \frac{y_0}{1+\beta^{-\sigma}(1+r)^{1-\sigma}}.$$
Le taux d'intérêt a deux effets opposés sur l'épargne. L'effet substitution rend la consommation de seconde période moins chère ($1/(1+r)$ diminue), ce qui tend à substituer de la consommation de seconde période à de la consommation de première période, et donc à augmenter l'épargne. L'effet revenu rend l'agent plus riche car son épargne lui rapporte davantage, ce qui tend à augmenter les consommations à chacune des périodes.
Lorsque l'agent est facilement prêt à substituer de la consommation à une période par de la consommation à une autre période, l'effet substitution domine : lorsque $\sigma > 1$, s est croissant en r. Lorsque l'agent veut davantage lisser sa consommation dans le temps, l'effet revenu domine : lorsque $\sigma < 1$, s est décroissant en r.

1. Pour le montrer, on résout le programme du consommateur pour trouver les consommations de première et seconde périodes c_0 et c_1, dont les prix sont $p_0 = 1$ et $p_1 = 1/(1+r)$, et on montre que
$$-\frac{\ln(c_0/c_1)}{\ln(p_0/p_1)} = -\frac{\ln(c_0/c_1)}{\ln(1+r)} = \sigma.$$

6. On a montré que $u'(c_t) = \lambda/(\beta(1+r))^t$, soit avec la fonction d'utilité CES,

$$c_t = \lambda^{-\sigma}\beta^{\sigma t}(1+r)^{\sigma t}.$$

On sature la contrainte budgétaire pour déterminer λ :

$$\sum_{t=0}^{T}\lambda^{-\sigma}\beta^{\sigma t}(1+r)^{(\sigma-1)t} = \sum_{t=0}^{T}\frac{y}{(1+r)^t},$$

d'où

$$\lambda^{-\sigma} = \frac{\sum_{t=0}^{T}\frac{y}{(1+r)^t}}{\sum_{t=0}^{T}\beta^{\sigma t}(1+r)^{(\sigma-1)t}}.$$

Finalement,

$$c_t = \frac{\beta^{\sigma t}(1+r)^{\sigma t}}{\sum_{s=0}^{T}\beta^{\sigma s}(1+r)^{(\sigma-1)s}}\sum_{s=0}^{T}\frac{y}{(1+r)^s}.$$

La fonction de consommation keynésienne écrit la consommation courante comme une fonction du revenu courant. Or notre modèle nous indique ici que la consommation courante dépend de la somme actualisée des revenus (c'est-à-dire du revenu permanent) et non du seul revenu courant. De plus, la consommation courante dépend également du taux d'intérêt.

7. On a, pour $t = 0$,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\sum_{s=0}^{T}\beta^{\sigma s}(1+r)^{(\sigma-1)s}}\sum_{s=0}^{T}\frac{y_s}{(1+r)^s} \\ &= \frac{\sum_{s=0}^{T}(1+r)^{-s}}{\sum_{s=0}^{T}\beta^{\sigma s}(1+r)^{(\sigma-1)s}}y. \end{aligned}$$

L'économètre qui estime l'équation (fausse) $c_0 = \gamma y_0$ obtient

$$\widehat{\gamma} = \frac{\sum_{s=0}^{T}(1+r)^{-s}}{\sum_{s=0}^{T}\beta^{\sigma s}(1+r)^{(\sigma-1)s}}$$

(avec un écart-type nul et un $R^2 = 1$! car nous avons écrit le modèle sans aléa), d'où la réponse (fausse) de l'économètre qui ne connaît pas la théorie du revenu permanent.

La bonne équation à estimer est en fait

$$c_0 = \sum_{t=0}^{T}\gamma_t y_t,$$

et

$$\gamma_t = \frac{(1+r)^{-t}}{\sum_{s=0}^{T}\beta^{\sigma s}(1+r)^{(\sigma-1)s}}.$$

La réponse correcte à la question posée à l'économètre est que la consommation augmente de $\gamma_0\Delta G$ en $t = 0$. L'erreur de l'économètre est de considérer que la consommation est une fraction du revenu courant, alors que c'est une fraction

du revenu permanent. Comme les deux sont égaux dans ce modèle (et corrélés positivement dans la réalité), l'économètre identifie à tort le revenu permanent au revenu courant, mais une augmentation du revenu initial n'augmente pas le revenu permanent de un pour un, d'où l'erreur de prévision de l'économètre. C'est le contenu de la critique de Lucas[1].

8. Une augmentation du revenu courant n'a donc qu'un faible impact sur la consommation courante, ce qui limite l'effet d'une relance de la consommation par les dépenses publiques.

   En outre, il se peut que l'État doive lever des taxes dans une période future de la vie de l'agent pour rembourser le déficit creusé par des dépenses publiques aujourd'hui, ce qui réduit l'augmentation du revenu permanent et donc l'augmentation de la consommation aujourd'hui.

6.3. Liquidité et paniques bancaires

Selon un banquier nantais, « disposer de placements liquides, c'est un basique de la gestion de patrimoine. C'est un peu comme avoir la petite robe noire dans sa garde robe » (L'Express 3092). L'objectif de ce problème est de discuter comment la liquidité peut compromettre la stabilité d'un marché, et pourquoi il peut être opportun d'imposer des règles prudentielles. Il s'inspire d'un article classique de D. Diamond et P. Dybvig (1983), Bank runs, deposit insurance, and liquidity, *Journal of Political Economy* 91, 401-19. Il reprend le cadre du modèle de cycle de vie mais décrit plus précisément les actifs qui permettent de transférer le revenu au cours du temps.

Il y a trois périodes, $t = 0,1,2$. Il y a un continuum d'agents (consommateurs) identiques sur le segment $[0,1]$. Chacun d'eux possède initialement (en $t = 0$) 1 bien. Aucun ne sait initialement à quel moment il aura besoin de liquidité : une proportion λ voudra consommer lors de la période 1, tandis que les $1-\lambda$ agents restants voudront consommer lors de la période 2. Chacun l'apprendra au début de la période 1. On appellera « impatients » les premiers et « patients » les autres. En notant c_t la consommation d'un agent en t, l'utilité d'un consommateur impatient est $u(c_1)$ et celle d'un patient est $u(c_2)$, avec $u' < 0$ et $u'' < 0$.

Il y a deux actifs différents pour transférer de la richesse au cours du temps : un actif « court » procure 1 bien en $t+1$ si l'on a placé 1 bien en t ($t = 0,1$), et un actif « long » qui procure $R > 1$ biens en $t = 2$ si l'on a placé 1 bien en $t = 0$. L'actif long peut être liquidé en $t = 1$, auquel cas il ne procure que $r < 1$ bien lors de cette période.

Les consommateurs n'ont pas accès directement au marché financier. Ils doivent passer par l'intermédiaire d'une banque. Cette banque est supposée se comporter de façon concurrentielle. Les consommateurs confient le bien qu'ils possèdent à la banque en $t = 0$. En contrepartie, elle propose un « contrat » qui prévoit de livrer c_1 biens à un consommateur se présentant à son guichet en $t = 1$, et c_2 biens à un consommateur qui se présente en $t = 2$. Bien sûr, un consommateur ne peut pas se

1. Du nom de l'économiste Robert Lucas, qui a formulé cette critique en 1976.

présenter aux deux dates ! Pour attirer les consommateurs, son objectif est de maximiser leur utilité espérée. On notera x et y les quantités d'actifs longs et courts, respectivement, que souhaite détenir la banque en $t = 0$, et θ la proportion d'actifs longs qu'elle liquide en $t = 1$.

1. Écrivez les trois contraintes budgétaires de la banque, en $t = 0, 1, 2$.
2. Écrivez l'objectif de la banque en $t = 0$, c'est-à-dire avant que les consommateurs ne sachent s'ils sont patients ou impatients. Vous supposerez que la loi des grands nombres s'applique, de sorte que la probabilité d'être impatient est égale à λ.
3. Montrez que $\theta = 0$ à l'optimum.
4. Montrez que la contrainte de budget relative à la période 1 est saturée.
5. Montrez que le portefeuille optimal (x^*, y^*) de la banque est tel que :

$$u'\left(c_1^*\right) = Ru'\left(c_2^*\right),$$

où c_1^* et c_2^* sont les consommations optimales d'un consommateur impatient et patient, respectivement. Déduisez-en que $c_1^* < c_2^*$.

6. (a) De quelle quantité de biens la banque peut-elle disposer au maximum en $t = 1$? (b) Les consommateurs impatients ont-ils intérêt à attendre $t = 2$ pour se présenter au guichet de la banque ? (c) Prenez maintenant le point de vue d'un consommateur patient en $t = 1$ qui anticiperait que tous les autres consommateurs patients vont se prétendre impatients et réclamer c_1^* en $t = 1$ (pour le consommer en $t = 2$). Qu'a-t-il intérêt à faire ? Vous supposerez que, si la banque ne peut pas honorer ses engagements, elle partage ses ressources également entre tous les consommateurs (réclamant des biens en $t = 1$).
7. Prenez à nouveau le point de vue d'un consommateur patient en $t = 1$, mais supposez cette fois qu'il anticipe que tous les autres consommateurs patients vont attendre $t = 2$ pour consommer c_2^*. Qu'a-t-il intérêt à faire en $t = 1$? Ce cadre permet-il de rendre compte de « paniques » bancaires ?
8. Retrouvez-vous les résultats des questions 7 et 8 lorsque la banque ne peut pas liquider tout son portefeuille mais doit toujours conserver, comme le prévoient les règles de Bâle, un certain ratio d'actifs longs par rapport à des actifs plus courts ?
9. Jusqu'à présent, nous avons implicitement supposé que la banque proposait le contrat optimal (c_1^*, c_2^*) sans prendre en compte le comportement des consommateurs patients, tel que décrit dans les questions 7 et 8. Supposons maintenant que les consommateurs patients réclament avec la probabilité π la quantité de biens promise à un consommateur patient en $t = 1$. On cherche si, lorsque la banque prend en compte ce comportement de retrait, il est possible qu'elle soit parfois mise en défaut et ne puisse pas honorer ses engagements. Quelles contraintes doivent être satisfaites pour que (a) la banque ne puisse pas honorer ses engagements lorsque tous les consommateurs patients se font passer pour

des consommateurs impatients et réclament la quantité de biens c_1 promise à ces derniers, (b) pour qu'aucun consommateur patient n'ait intérêt à se faire passer pour impatient lorsqu'il pense que tous les autres patients attendront $t = 2$ pour retirer la quantité qui leur a été promise par la banque, (c) pour que les contraintes de budget soient satisfaites en $t = 0, 1, 2$. Écrivez finalement l'objectif de la banque lorsqu'elle tient compte de toutes ces contraintes.

10. Montrez que le portefeuille y^{**} choisi par la banque satisfait $y^* < y^{**}$. Interprétez.
11. Quel portefeuille la banque choisit-elle si elle anticipe que les consommateurs patients n'auront pas intérêt à réclamer la quantité de biens promise aux patients en $t = 1$, et que tel est effectivement le cas. Vous supposerez que
$$c_1^* \leqslant \frac{r}{1-(1-r)\lambda}.$$
12. Décrivez finalement la politique optimale de la banque en fonction de π : quand doit-elle se préoccuper d'une panique possible de ses clients ?

Éléments de correction

1. Ces contraintes s'écrivent respectivement :
$$x + y \leqslant 1, \tag{4.12}$$
$$\lambda c_1 \leqslant y + \theta r x, \tag{4.13}$$
$$(1-\lambda)c_2 \leqslant (1-\theta)Rx + \left(y + \theta r x - \lambda c_1\right). \tag{4.14}$$
2. L'objectif est de maximiser $\lambda u(c_1) + (1-\lambda)u(c_2)$ sous les contraintes de la question 1.
3. Supposons au contraire $\theta > 0$. On considère la modification de portefeuille suivante : $dx + dy = 0$ de façon à assurer que (4.12) est satisfaite, et $d\theta < 0$ telle que $dy + \theta r dx + r x d\theta = 0$. Par hypothèse, la ressource en $t = 1$ ne change pas. La ressource totale en $t = 2$ varie de $(1-\theta)Rdx - Rxd\theta$. Avec $d\theta < 0$, il suffit de prendre $dx > 0$: la banque doit substituer l'actif court à l'actif long, plutôt que de liquider ce dernier en $t = 1$ (au prix d'un plus faible rendement).
4. Sinon, une modification $dy < 0$ telle que $dx + dy = 0$ implique que la ressource en $t = 2$ (avec $\theta = 0$) varie de $d\left(Rx + y\right) = (R-1)dx > 0$.
5. Il suit des questions 4 et 5 que $\lambda c_1 = y$ et $(1-\lambda)c_2 = R(1-y)$. Le portefeuille optimal comporte donc y^* actifs courts, avec
$$y^* = \arg\max_y \left\{ \lambda u\left(\frac{y}{\lambda}\right) + (1-\lambda)u\left(\frac{1-y}{1-\lambda}R\right) \right\},$$
soit, $u'\left(c_1^*\right) = Ru'\left(c_2^*\right)$. En utilisant la concavité de u, on a :
$$u'\left(c_1^*\right) = Ru'\left(c_2^*\right) > u'\left(c_2^*\right) \Rightarrow c_1^* < c_2^*.$$

6. (a) La banque peut livrer au maximum $y^* + rx^*$. (b) Si un consommateur impatient décide d'attendre $t = 2$ pour consommer, son utilité est nulle : il se présente toujours au guichet en $t = 1$. (c) Si tous les consommateurs réclament c_1^*, la banque doit livrer $\lambda c_1^* + (1-\lambda)c_1^* = c_1^* > y^* = c_1^*/\lambda$. Elle doit donc liquider des actifs longs. Si $c_1^* < y^* + rx^*$, il reste suffisamment de ressources en $t = 2$ pour livrer $c_2^* > c_1^*$ à un consommateur patient (infinitésimal) qui déciderait d'attendre $t = 2$ pour retirer ses avoirs. Sinon, c'est-à-dire si $c_1^* \geqslant y^* + rx^*$, la banque livre à chacun $y^* + rx^*$. Il ne lui reste rien en $t = 2$ (elle a liquidé tous ses actifs longs). Un consommateur patient qui déciderait d'attendre pour consommer c_2^* n'aura donc plus rien en $t = 2$!
   Au total, si $c_1^* < y^* + rx^*$, le consommateur patient décidera d'attendre pour consommer c_2^* ; si $c_1^* \geqslant y^* + rx^*$, il ira réclamer c_1^* en $t = 1$. Comme tous font le même raisonnement, la banque est mise en défaut si et seulement si $c_1^* \geqslant y^* + rx^*$.
7. S'il se prétend impatient, il consomme c_1^* ; sinon, il consomme $c_2^* > c_1^*$. Il a donc intérêt à attendre $t = 2$ pour retirer ses avoirs. Il y a donc deux équilibres de Nash lorsque $c_1^* \geqslant y^* + rx^*$: l'un où chaque consommateur patient « panique » et décide de retirer ses avoirs dès $t = 1$, ce qui met la banque en faillite, et l'autre où ces consommateurs attendent pour retirer leurs avoirs au moment où ils en ont effectivement besoin.
8. Si la banque ne peut pas liquider ses actifs longs, elle détient forcément Rx^* en $t = 2$, de sorte que les consommateurs patients n'ont pas intérêt à se prétendre impatients en $t = 1$. Seule la situation où personne ne « panique » de la question 7 se retrouve.
9. (a) $y + rx \leqslant c_1$, (b) $c_1 \leqslant c_2$, (c)
$$\begin{aligned} x + y &\leqslant 1, \\ \lambda c_1 &\leqslant y, \\ (1-\lambda)c_2 &\leqslant Rx. \end{aligned}$$
   L'objectif de la banque est de choisir un portefeuille qui maximise
$$\pi u(y + rx) + (1-\pi)\left[\lambda u(c_1) + (1-\lambda)u(c_2)\right]$$
   sous les contraintes précédentes.
10. Le portefeuille y^{**} choisi maximise
$$\pi u(y + r(1-y)) + (1-\pi)\left[\lambda u\left(\frac{y}{\lambda}\right) + (1-\lambda)u\left(\frac{1-y}{1-\lambda}R\right)\right].$$
    Ainsi,
$$\pi(1-r)u'(y^{**} + r(1-y^{**})) + (1-\pi)\left[u'\left(c_1^{**}\right) - Ru'\left(c_2^{**}\right)\right] = 0. \tag{4.15}$$
    L'objectif est concave en y. Au point y^*, sa dérivée première est :
$$\pi(1-r)u'(y^* + r(1-y^*)) > 0.$$
    Le résultat s'ensuit. La banque se prémunit contre la possibilité d'une panique en augmentant la quantité d'actifs courts qu'elle détient.

11. La banque choisit (x, y) et (c_1, c_2) qui maximisent

$$\lambda u(c_1) + (1-\lambda)u(c_2)$$

sous les contraintes

$$x + y \leqslant 1,$$

$$\lambda c_1 \leqslant y,$$

$$(1-\lambda)c_2 \leqslant Rx + \big(y - \lambda c_1\big),$$

$$c_1 \leqslant y + rx, \tag{4.16}$$

$$c_1 \leqslant c_2 \tag{4.17}$$

Les contraintes peuvent se réécrire plus simplement, en utilisant $x = 1 - y$ et $\lambda c_1 = y$,

$$R\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \leqslant R$$

$$c_1 \leqslant \frac{r}{1-(1-r)\lambda}$$

$$c_1 \leqslant c_2$$

Si

$$c_1^* \leqslant \frac{r}{1-(1-r)\lambda},$$

alors la solution de ce problème est l'optimum (c_1^*, c_2^*) obtenu à la question 5. Sinon, à l'optimum,

$$c_1 = \frac{r}{1-(1-r)\lambda}, \quad c_2 = \frac{R}{1-(1-r)\lambda}$$

12. La banque se cherche pas à se protéger contre une panique possible de ses clients (patients) si et seulement si

$$\lambda u(c_1^*) + (1-\lambda)u(c_2^*) > \pi u(y^{**} + rx^{**}) + (1-\pi)\left[\lambda u(c_1^{**}) + (1-\lambda)u(c_2^{**})\right]. \tag{4.18}$$

Le membre de gauche ne dépend pas de π. En utilisant le théorème de l'enveloppe, le membre de droite est décroissant avec π puisque sa dérivée première en π est

$$\begin{aligned} & u(y^{**} + rx^{**}) - \left[\lambda u(c_1^{**}) + (1-\lambda)u(c_2^{**})\right] \\ < \;& u(c_1^{**}) - \left[\lambda u(c_1^{**}) + (1-\lambda)u(c_2^{**})\right] \\ = \;& (1-\lambda)(u(c_1^{**}) - u(c_2^{**})) \\ < \;& 0, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité suit de $c_1^{**} < c_2^{**}$. Il existe par conséquent $\bar{\pi} \in [0,1]$ tel que (4.18) est satisfaite si et seulement si $\pi > \bar{\pi}$. La banque se cherche pas à se protéger contre une panique possible de ses clients si ces paniques se produisent plutôt rarement.

7. REPÈRES BIBLIOGRAPHIQUES

Deaton (1992) est une référence sur la théorie de la consommation. La fin du chapitre s'appuie sur cet ouvrage. Avec une emphase sur la macroéconomie, Romer (2001) discute la plupart des points abordés dans ce chapitre.

CHAPITRE 5

Épargne et accumulation

1. INTRODUCTION

À court terme, une hausse de l'épargne est nécessairement associée à une baisse de la consommation. Une fois que l'on prend en compte les conséquences de l'épargne sur l'accumulation du capital, à plus long terme, cette relation n'est plus évidente. Les chapitres 1 et 2 suggèrent qu'on la retrouve, en un sens, lorsque l'économie est dynamiquement inefficace (une baisse du stock de capital par tête conduisant alors à une hausse de la consommation), mais pas dans la configuration où l'économie est dynamiquement efficace. La figure 1 confirme que l'économie française semble être plutôt dynamiquement efficace, mais aussi qu'elle est loin d'avoir atteint son état de long terme : on constate que la consommation par tête croît en France à peu près au même rythme que le stock de capital par tête, tous les deux ayant augmenté de 50 % environ depuis 20 ans.

Il reste bien sûr possible d'interpréter la figure 1 comme une transition de l'économie française vers un équilibre dynamiquement inefficace. Le modèle à générations imbriquées laisse penser que les économies ne tendront pas spontanément à maximiser la consommation par tête, mais il est difficile de se faire une idée sur l'optimalité de la situation qui en résulte. Pour cela, il faudrait se donner un critère de bien-être précisant le poids que l'on affecte aujourd'hui aux différentes générations d'individus qui vont se succéder au cours du temps. Nous allons dans ce chapitre reprendre le cadre alternatif que nous avons commencé à étudier dans les chapitres 3 et 4. Dans ce cadre, il n'y a qu'un seul individu vivant un très grand nombre de périodes consécutives. Nous allons maintenant rassembler les différents éléments de l'ensemble des chapitres précédents pour décrire la confrontation entre cet individu représentatif des ménages (qui travaillent, consomment et épargnent) et la sphère productive. Ce cadre très célèbre a été introduit par Ramsey (1928). Il s'agit du modèle de croissance

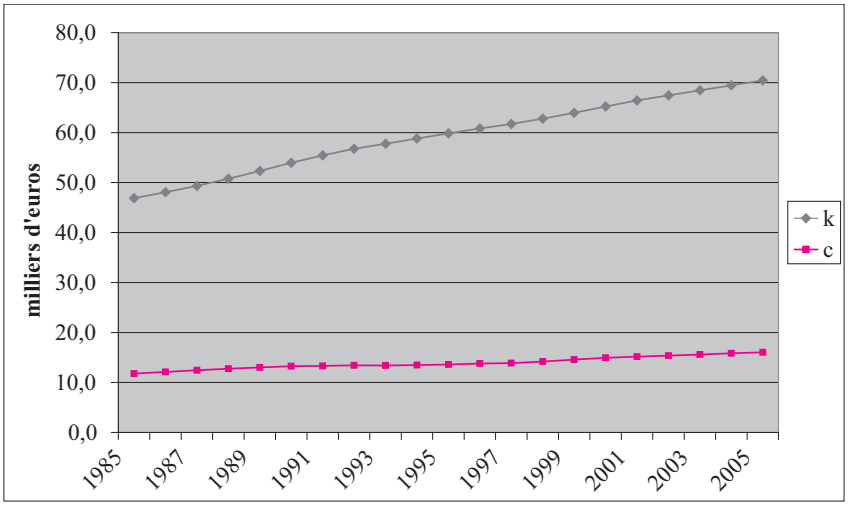


FIGURE 1
Consommation et capital par tête en France (1985 : 2005)

optimale, connu aussi comme le modèle à horizon infini. Il forme sans doute aujourd'hui une grande partie du coeur de l'analyse macroéconomique, aussi bien théorique qu'appliquée. Dans ce cadre, si nous conservons l'hypothèse de rendements d'échelle constants, le critère de bien-être que l'on devrait adopter s'impose de lui-même : nous devrions choisir de maximiser le bien-être de l'unique ménage existant. Il sera alors possible d'offrir une autre réponse à la question : faut-il maximiser la consommation par tête à long terme ? Elle devra être confrontée aux conclusions du chapitre 3.

La réponse à cette question est finalement simple : non, dès lors que le ménage manifeste une préférence pour le présent. Et l'intuition est simple elle aussi : il n'est pas optimal de pousser un individu impatient de consommer à réaliser l'effort d'accumulation nécessaire pour maximiser la consommation par tête de long terme. Aussi le stock de capital, à long terme, devrait-il être inférieur à celui qui prévaut à la règle d'or. Il sera toutefois défini par une règle similaire, qui prend cette fois en compte la préférence du ménage pour le présent, et qu'on appelle pour cette raison la « règle d'or modifiée ».

À moyen terme, de nombreuses questions restent sans réponse : l'économie va-t-elle spontanément converger vers l'état optimal de la règle d'or modifiée ou devrait-on intervenir dans l'économie pour influencer son évolution au cours du temps ? Si oui, comment ? Le développement optimal de l'économie revêt-il plusieurs facettes, au sens où plusieurs sentiers pourraient conduire à long terme l'économie vers la règle d'or modifiée ? Requiert-il un effort d'accumulation tel que la consommation par tête devrait baisser dans les premières phases de développement ? Le modèle à horizon infini fournit des réponses à toutes ces questions.

2. LE CADRE

2.1. La dynamique du capital par tête

On considère un cadre dans lequel il y a deux agents (un ménage représentatif et une entreprise) et un bien, qui peut être soit consommé soit investi (utilisé comme capital). Le temps est continu. À l'instant t, sur un intervalle de temps dt, on a :

$$F(K_t, N_t)dt = C_t dt + dK_t \Leftrightarrow \frac{dK_t}{dt} = F(K_t, N_t) - C_t. \tag{5.1}$$

Il n'y a pas de monnaie : la production est soit épargnée, soit conservée, la partie non consommée servant de capital pour la production future. Cela implique que le stock de capital est donné (prédéterminé) à l'instant t, dans la version en temps continu sur un petit intervalle de temps de longueur dt. La « population » augmente au taux n constant, soit

$$n = \frac{1}{N_t}\frac{dN_t}{dt},$$

et connaît donc une croissance exponentielle,

$$\int_0^t \frac{1}{N_\tau}\frac{dN_\tau}{d\tau}d\tau = \int_0^t n d\tau \Leftrightarrow N_t = N_0 \exp(nt).$$

En utilisant

$$\frac{1}{k_t}\frac{dk_t}{dt} = \frac{1}{K_t}\frac{dK_t}{dt} - \frac{1}{N_t}\frac{dN_t}{dt} \Rightarrow \frac{1}{N_t}\frac{dK_t}{dt} = \frac{dk_t}{dt} + nk_t,$$

l'équation (5.1) devient :

$$\frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - c_t - nk_t, \tag{5.2}$$

le stock de capital par tête k_0 initial étant donné. En l'absence de croissance démographique, la variation du stock de capital par tête sur un intervalle de temps dt est égale à l'épargne par tête. Comme la population croît au taux n, cette hausse du stock de capital est partagée entre un plus grand nombre d'individus, ce qui fait baisser mécaniquement le stock de capital par tête. Cette évolution est très voisine de la condition d'équilibre sur le marché des biens obtenue dans le modèle de Diamond (1965) du chapitre 3. Ici, cependant, il n'y a pas de désépargne des agents vieux, de sorte que (5.2) fait bien apparaître la *variation* du stock de capital par tête, et non pas le *niveau* du capital futur.

La fonction f est supposée satisfaire les conditions d'Inada : $f(0) = 0$, $f'(0) \to \infty$, $f'(\infty) = 0$.

2.2. Les préférences du ménage

Jusqu'à présent, le cadre coïncide avec celui du modèle de croissance néoclassique de Solow (1956). C'est maintenant qu'il s'en écarte, en dérivant explicitement le comportement d'épargne des ménages de leurs préférences individuelles (le taux d'épargne

n'est plus exogène). Les préférences du ménage à la date 0 sont représentées par une fonction d'utilité

$$\int_0^\infty u(c_t)\exp(-\theta t)dt. \tag{5.3}$$

Le paramètre θ, $\theta > 0$, s'interprète comme le taux de préférence pour le présent sur une période *discrète* d'une unité de temps : évaluée à l'instant t, la consommation de c unités de bien en t rapporte un bien être $u(c)$, et alors que la consommation de ces c unités de bien rapporte un bien être $u(c)/(1+\theta)$ si la consommation a lieu en $t+1$.

Rappel 1. Soit i le taux d'intérêt par période ; par exemple, le taux annuel. Si l'on place une somme égale à $V(t)$ unités de monnaie en t, on obtient $(1+i)V(t)$ une période plus tard. Ainsi, la valeur actuelle d'une unité de monnaie perçue dans une période est égale à $1/(1+i)$. Considérons maintenant un petit intervalle de temps $[t, t+dt]$. Définissons T telle que $Tdt = 1$. La valeur actuelle d'une unité de monnaie perçue en $t+dt$ est égale à $1/(1+i)^{1/T}$, ou bien encore, à $1/(1+i)^{dt}$. Au premier ordre, pour i arbitrairement proche de 0,

$$(1+i)^{-dt} \simeq 1 - i\,dt \simeq \exp(-i\,dt).$$

En t, la valeur actualisée de $V(t+dt)$ est donc $V(t+dt)\exp(-i\,dt)$. Plus généralement, puisque l'argument ne dépend pas de la durée de l'intervalle de temps, la valeur $V(t)$ en t actualisée en 0 est $V(t)\exp(-it)$. □

3. L'OPTIMUM SOCIAL

Devons-nous retenir comme critère de bien-être la consommation par tête de long terme ? Après tout, c'est ce que l'on consomme qui nous importe, pas ce que l'on épargne ! Ici, il est naturel d'adopter comme critère de bien-être social le bien-être du ménage lui-même. Est-il alors optimal de lui attribuer une consommation de long terme maximale, étant données les contraintes technologiques auxquelles l'économie doit se soumettre ?

3.1. Le problème du planificateur

Pour répondre à cette question, examinons le problème du planificateur. Ce problème consiste à choisir une suite $(c_t, k_t, t \geqslant 0)$ qui maximise

$$\int_0^\infty u(c_t)\exp(-\theta t)dt$$

sous les contraintes

$$\frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - c_t - nk_t,$$

pour tout $t \geqslant 0$, avec $k_t \geqslant 0$ (et $c_t \geqslant 0$), et k_0 donné.

Dans ce problème, le planificateur choisit à la date t un niveau de consommation : la consommation est une *variable de contrôle*. Étant donnée la production courante,

il en résulte un supplément de capital à l'instant suivant : le capital est une *variable d'état*.

Soit μ_t le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'accumulation du capital à la date t ; à l'optimum, μ_t est égal au supplément de bien-être qu'apporterait une unité de capital supplémentaire à l'instant t, évalué en 0.

3.2. Les conditions du premier ordre

Il est possible de résoudre ce problème en procédant comme dans le chapitre 4. On écrirait alors l'analogue de la contrainte budgétaire intertemporelle en résolvant l'équation différentielle qui régit la dynamique d'accumulation du capital, puis le Lagrangien correspondant au problème de maximisation de l'utilité de l'agent représentatif sous cette unique contrainte.

On peut également utiliser les méthodes de la programmation dynamique. C'est l'approche que nous privilégierons désormais. Une dérivation heuristique des conditions du premier ordre associées à ce problème est donnée dans l'annexe 7.1 ; voir Barro et Sala-i-Martin (2003), annexe A3, pour une présentation un peu plus générale, et Kamien et Schwartz (1991) sinon.

On définit le Hamiltonien

$$\mathscr{H}_t = u(c_t)\exp(-\theta t) + \mu_t\left(f(k_t) - c_t - nk_t\right)$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent : pour tout $t \geqslant 0$,

$$\frac{\partial \mathscr{H}_t}{\partial c_t} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}_t}{\partial k_t} = -\frac{d\mu_t}{dt}$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t k_t = 0. \tag{5.4}$$

Les deux premières équations s'écrivent ici :

$$u'(c_t)\exp(-\theta t) - \mu_t = 0, \tag{5.5}$$

$$\mu_t(f'(k_t) - n) + \frac{d\mu_t}{dt} = 0. \tag{5.6}$$

En outre,

$$\frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - c_t - nk_t. \tag{5.7}$$

Notre objectif est de décrire comment devraient se comporter la consommation et le capital au cours du temps à l'optimum. Des indications sur la dynamique optimale du capital nous sont déjà données par l'équation (5.7). La dynamique optimale de

la consommation résulte quant à elle de (5.5) et (5.6). Pour le voir, remarquons que, comme (5.5) doit être vraie pour tout t, on a :

$$\frac{d\mu_t}{dt} = u''(c_t)\frac{dc_t}{dt}\exp(-\theta t) - \theta u'(c_t)\exp(-\theta t). \tag{5.8}$$

En réintroduisant dans (5.6), et en réutilisant (5.5), on obtient :

$$-\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\frac{dc_t}{dt} = f'(k_t) - n - \theta. \tag{5.9}$$

Le terme $-cu''(c)/u'(c) = 1/\sigma(c) > 0$ est l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle (cette élasticité est déjà apparue à plusieurs reprises dans les chapitre précédents ; cf. Annexe 7.2 pour une définition). On obtient donc finalement :

$$\frac{dc_t}{dt} = (f'(k_t) - n - \theta)\sigma(c_t)c_t. \tag{5.10}$$

Cette équation est l'*équation d'Euler*, la condition de « Ramsey-Keynes ».

Au total, les dynamiques de la consommation et du capital sont décrites par l'équation d'Euler (5.10) et la contrainte d'accumulation (5.7). Deux conditions, initiales ou terminales, sont donc encore nécessaires. La première est la valeur initiale du stock de capital k_0 ; la seconde est donnée par la *condition de transversalité* (5.4).

3.3. La condition d'Euler

La condition d'Euler est une condition nécessaire d'optimalité de la trajectoire (c_t, k_t). Pour le comprendre, donnons-nous une trajectoire (par exemple, la trajectoire optimale). Plaçons-nous à l'instant t et supposons que la consommation baisse, par rapport à la trajectoire initiale, d'un petit montant $\Delta c_t > 0$ à chaque instant sur un petit intervalle de temps de longueur dt. La consommation baisse donc de $\Delta c_t dt$. Le stock de capital en $t+dt$ augmente en contrepartie de $\Delta k_t = \Delta c_t dt$. Supposons alors que la consommation retrouve son niveau initial jusqu'en $s > t+dt$. Pour Δk_t suffisamment petit, le supplément de capital évolue, en utilisant (5.7), selon la loi

$$\frac{d(\Delta k_\tau)}{d\tau} = (f'(k_\tau) - n)\Delta k_\tau$$

entre $t+dt$ et s, avec $\Delta k_{t+dt} = \Delta k_t$, et k_τ le stock de capital par tête le long de la trajectoire initiale. En s, on obtient donc un supplément de capital

$$\Delta k_s = \exp\left(\int_{t+dt}^{s}(f'(k_\tau) - n)d\tau\right)\Delta k_t.$$

Si ce supplément de capital est consommé sur un intervalle de temps de longueur dt à compter de s, le supplément de consommation instantané sur cet intervalle est $\Delta c_s dt = \Delta k_s$. Ainsi :

$$\Delta c_s = \exp\left(\int_{t+dt}^{s}(f'(k_\tau) - n)d\tau\right)\Delta c_t.$$

Si la trajectoire initiale est optimale, cette modification marginale du profil de consommation et d'accumulation ne doit apporter aucun supplément de bien-être :

$$-\exp(-\theta t)u'(c_t)\Delta c_t + \exp(-\theta s)u'(c_s)\Delta c_s = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\exp(-\theta t)u'(c_t)}{\exp(-\theta s)u'(c_s)} = \exp\left(\int_{t+dt}^{s}(f'(k_\tau)-n)d\tau\right). \tag{5.11}$$

Le membre de gauche est le taux marginal de substitution entre c_s et c_t : lorsque la consommation en t baisse d'une unité, la consommation en s doit augmenter de ce taux pour que l'utilité du ménage reste constante. Le membre de droite est un taux marginal de transformation : en renonçant à consommer une unité de bien en t, on récupère une unité de capital qui, sous l'effet des taux d'intérêt composés, donne un nombre de biens de consommation supplémentaires égal à ce taux. Il s'ensuit que, si le membre de gauche est inférieur au membre de droite, le ménage peut accroître son utilité en consommant moins en t ; il peut sinon l'accroître en consommant plus en t.

La condition (5.11) ne correspond pas encore à l'équation d'Euler. L'équation d'Euler apparaît lorsque s et t sont suffisamment proches. En effet, au premier ordre, pour s arbitrairement proche de t, on a :

$$\frac{\exp(-\theta t)u'(c_t)}{\exp(-\theta s)u'(c_s)} \simeq 1+(s-t)\left(\theta - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\frac{dc_t}{dt}\right) \tag{5.12}$$

et

$$\exp\left(\int_{t+dt}^{s}(f'(k_\tau)-n)d\tau\right) \simeq 1+(s-t)(f'(k_t)-n).$$

Ainsi, pour s et t arbitrairement proches, (5.11) s'écrit :

$$\theta - \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\frac{dc_t}{dt} = f'(k_t)-n,$$

ce qui coïncide bien avec l'équation d'Euler, sous sa forme (5.9).

Puisque $\sigma(c_t) \geqslant 0$, la consommation est croissante au cours du temps si $f'(k_t)-n>\theta$; elle est constante si $f'(k_t)-n=\theta$, et décroissante sinon.

Supposons par exemple que $f'(k_t)-n>\theta$. Cette condition sera satisfaite pour un stock de capital k_t suffisamment petit. Alors, le taux de croissance de la consommation est d'autant plus grand, le long d'une trajectoire optimale, que $f'(k_t)-n-\theta$ et que $\sigma(c_t)$ sont grands :

$$\frac{1}{c_t}\frac{dc_t}{dt} = (f'(k_t)-n+\theta)\sigma(c_t),$$

Ces propriétés sont très intuitives :

1. Le terme $f'(k_t)-n$ représente le rendement marginal du capital par tête : s'il est très élevé, on devrait réduire significativement la consommation par tête lors des premières périodes pour profiter d'une consommation élevée dans le futur.

2. Cette dépréciation de la consommation par tête lors des premières périodes sera d'autant plus marquée que le ménage est patient, c'est-à-dire qu'il valorise relativement peu le présent par rapport au futur, soit θ est petit.
3. De même si ses goûts, représentés par la fonction u, sont tels qu'il est prêt à substituer facilement la consommation future à la consommation courante, soit $\sigma(c_t)$ est grande.

3.4. La condition de transversalité

Le comportement de consommation de l'agent dans le chapitre précédent était lui aussi gouverné par une équation d'Euler. Mais il n'était valable que lorsque la contrainte de budget limitait véritablement les choix de consommation au cours du temps. Tel était le cas lorsque l'on imposait la condition de Ponzi. On retrouve cette contrainte en interprétant la condition de transversalité.

Faisons tout d'abord comme si l'horizon n'était pas infini, mais fixé à un nombre T fini de périodes. Si $k_T > 0$ et $\mu_t = \exp(-\theta T)u'(c_T) > 0$, la trajectoire n'est pas optimale puisque le planificateur pourrait, du point de vue de la période initiale, augmenter le bien-être du ménage en le faisant consommer une partie du capital existant à cette date. Cela montre qu'à l'optimum, si $k_T > 0$, on doit avoir $\exp(-\theta T)u'(c_T) = 0$. Si $k_T = 0$, $\exp(-\theta T)u'(c_T) \geqslant 0$. Ou bien encore, plus généralement,

$$k_T \exp(-\theta T)u'(c_T) = 0.$$

La condition de transversalité s'obtient en posant T arbitrairement grand, après avoir utilisé (5.5). Elle nous dit donc qu'à long terme, la valeur du capital, du point de vue de la période 0, doit être nulle ; sinon, ce capital devrait être consommé.

3.5. Les situations stationnaires

Nous allons commencer par nous intéresser aux situations stationnaires. Pour $\sigma(c_t) > 0$,

$$\frac{dc_t}{dt} = 0 \Leftrightarrow (f'(k_t) - n - \theta)c_t = 0, \tag{5.13}$$

$$\frac{dk_t}{dt} = 0 \Leftrightarrow f(k_t) - c_t - nk_t = 0. \tag{5.14}$$

Soient c^* et k^* les deux quantités stationnaires solutions de (5.13) et (5.14).

Cas 1. Si $c^* > 0$, alors (c^*, k^*) est tel que

$$f'(k^*) = n + \theta, \tag{5.15}$$

$$c^* = f(k^*) - nk^*. \tag{5.16}$$

La première équation définit un unique stock de capital par tête k^* (sous les conditions d'Inada, et avec $f'' < 0$). Elle nous permet déjà de répondre en partie à la question que nous nous posions initialement : devrait-on maximiser la consommation par tête à long terme ?

On constate que cette condition est très voisine de la règle d'or d'accumulation. Comme le montre (5.16), la consommation par tête est encore maximisée pour un stock de capital k^*_{or} tel que $f'(k^*_{\text{or}}) = n$. Cependant, si $\theta > 0$ dans (5.15), k^* et k^*_{or} ne coïncident pas. Pour cette raison, (5.15) est appelée la *règle d'or modifiée* d'accumulation du capital. Pour $\theta > 0$, on a $k^* < k^*_{\text{or}}$: le planificateur ne choisira pas, dans cette configuration, de maximiser la consommation par tête.

Ce résultat est somme toute assez intuitif : puisque les ménages manifestent une préférence pour le présent, le planificateur ne va pas forcément chercher à leur imposer l'effort d'accumulation nécessaire pour atteindre la règle d'or, parce que cela nécessiterait une réduction de la consommation courante pour atteindre un plus haut niveau de consommation future.

Cas 2. Si $c^* = 0$, alors on doit avoir $f(k^*) = nk^*$. Clairement, $k^* = 0$ est solution. Sous les conditions d'Inada, il existe en outre un autre stock de capital par tête solution, $\tilde{k}^* > k^*_{\text{or}} > 0$ (la fonction $f(k) - nk$ est continue et concave, nulle en $k = 0$, croissante pour k petit, et négative pour k suffisamment grand).

Pour résumer, il y a trois situations stationnaires solutions de (5.15) et (5.16) : $(0,0)$, $(\tilde{k}^*, 0)$ et, si $c^* > 0$, la situation stationnaire de la règle d'or modifiée (k^*, c^*).

3.6. La dynamique globale

Pour l'instant, nous n'avons pas pris en compte toutes les conditions définissant l'optimum, notamment la condition de transversalité. On devine par exemple que la situation stationnaire dans laquelle la consommation par tête est nulle mais le capital positif n'est pas une solution du problème du planificateur. Pour le vérifier, nous allons étudier la (les) trajectoire(s) optimale(s).

Vérifions tout d'abord que l'état stationnaire de la règle d'or modifiée est bien une solution optimale. Il suit de (5.6) que :

$$\frac{1}{\mu_t}\frac{d\mu_t}{dt} = n - f'(k^*) = -\theta.$$

La valeur d'une unité de capital supplémentaire en t décroît au taux θ. La condition de transversalité (5.4) est donc satisfaite (puisque k^* est constant et $\mu_t \geqslant 0$) à la règle d'or modifiée.

Le lieu des paires (c_t, k_t) telles que la consommation par tête est constante (au cours du temps) est décrit par $f'(k_t) = n + \theta$ pour $c_t > 0$. La consommation par tête est croissante au cours du temps si $k_t < k^*$ où k^* est le stock de capital par tête correspondant à la règle d'or modifiée ; elle est décroissante si $k_t > k^*$. Ces mouvements sont représentés par les flèches verticales dirigées vers le haut si l'on se trouve dans une région du plan où la consommation augmente au cours du temps, et vers le bas si elle diminue.

Le lieu des paires (c_t, k_t) telles que le stock de capital par tête reste constant est décrit par $c_t = f(k_t) - nk_t$; la fonction $f(k) - nk$ est concave, part de l'origine, atteint

son maximum pour le stock k^*_{or}, et redevient nulle pour $\tilde{k}^* > 0$. Étant donné k_t, une consommation par tête supérieure à $f(k_t) - nk_t$ implique une baisse du stock de capital ; une consommation inférieure à $f(k_t) - nk_t$ implique une hausse du stock de capital. Ces mouvements sont cette fois représentés par les flèches horizontales pointant vers la droite si l'on se trouve dans une région du plan où le capital par tête augmente au cours du temps, et vers la gauche s'il diminue.

Il y a quatre régions différentes dans le plan (c_t, k_t). Elles sont délimitées par la droite verticale le long de laquelle la consommation reste constante au cours du temps, et par la courbe en cloche (le long de laquelle le capital reste constant).

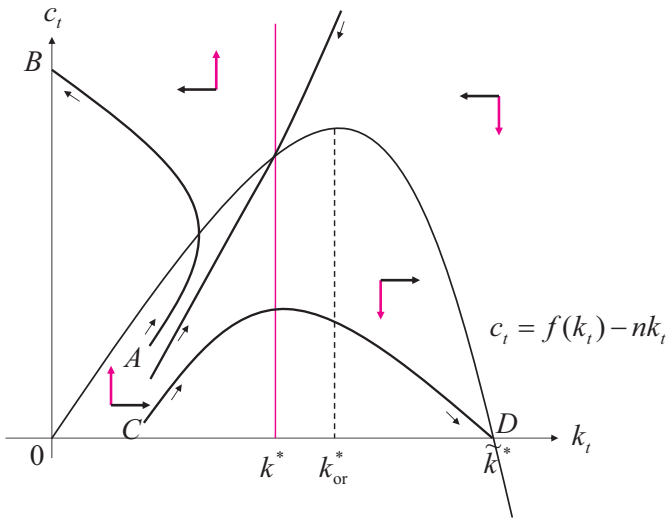


FIGURE 2
La dynamique optimale globale

Pour étudier les trajectoires optimales, étudions d'abord la trajectoire partant de A dans la figure 2. Elle atteint le point B. Ce point n'est pas réalisable (le stock de capital par tête étant nul, la consommation par tête doit être nulle). L'économie doit, pour $k_t = 0$, sauter sur l'origine. Mais ce saut implique une baisse de la consommation par tête qui contredit la propriété $dc_t/dt > 0$ pour k_t inférieur au stock de capital de la règle d'or modifiée. Toutes les trajectoires, qui étant donné k_0, sont associées à une consommation supérieure à celle de A ne correspondent pas à des trajectoires solution.

Prenons une trajectoire partant maintenant du point C. Elle converge asymptotiquement vers le point D, où la consommation est nulle et le stock de capital est égal à $\tilde{k}^*$. L'équation d'Euler, sous sa forme (5.9), s'écrit

$$-\frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}\frac{dc_t}{dt} = -\frac{1}{u'(c_t)}\frac{du'(c_t)}{dt} = f'(k_t) - n - \theta.$$

L'utilité marginale croît donc au taux $n+\theta-f'(k_t)$. Comme k_t est proche de D, on a $k_t > k^*_{\text{or}}$, et donc $f'(k_t) < f'(k^*_{\text{or}}) = n$, ce qui implique à son tour que $f'(k_t)+\theta < n+\theta$, soit $n+\theta-f'(k_t) > \theta$. Ainsi, l'utilité marginale de la consommation croît à un taux supérieur à θ. Donc, le long de cette trajectoire,

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t k_t = \lim_{t\to\infty} u'(c_t)\exp(-\theta t)k_t \simeq \lim_{t\to\infty} u'(c_t)\exp(-\theta t)\tilde{k}^* > 0,$$

ce qui viole la condition de transversalité.

Au total, pour $k_0 > 0$, il existe une unique trajectoire optimale (cette trajectoire est la seule à satisfaire (5.4), (5.7) et (5.10)). La paire (c_t, k_t) converge vers la règle d'or modifiée : si $k_0 < k^*$, le stock de capital et la consommation augmentent au cours du temps. Sinon, ils baissent tous les deux. Il n'est donc jamais optimal d'imposer une baisse de la consommation par tête pour accroître le stock de capital par tête.

3.7. La dynamique locale

On sait maintenant que l'optimum (stationnaire) correspondant à la règle d'or modifiée est un point-selle : étant donné k_0, il n'existe qu'une seule trajectoire convergeant vers cet optimum. On aimerait à ce stade savoir s'il est acceptable en pratique de concentrer notre attention sur l'équilibre stationnaire ou bien si l'on doit étudier l'ensemble de la trajectoire. Intuitivement, une convergence très rapide vers l'équilibre de long terme le rend plus pertinent : on peut en pratique négliger ce qui se passe lors de la phase de transition, par exemple à la suite d'une perturbation causée par la mise en place d'une mesure de politique économique. Afin d'évaluer cette vitesse de convergence, nous allons nous intéresser à la dynamique de (c_t, k_t) dans un voisinage de (k^*, c^*).

Pour cela, linéarisons le système formé par (5.13) et (5.14) au point (k^*, c^*). On obtient :

$$\frac{dc_t}{dt} = (k_t - k^*)f''(k^*)\sigma(c^*)c^*,$$

et

$$\frac{dk_t}{dt} = (k_t - k^*)(f'(k^*) - n) - (c_t - c^*).$$

Ce système est gouverné par les deux valeurs propres de la matrice Jacobienne

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & f''(k^*)\sigma(c^*)c^* \\ -1 & f'(k^*) - n \end{pmatrix}.$$

Ce sont les deux racines du polynôme caractéristique

$$\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - \theta\lambda + f''(k^*)\sigma(c^*)c^* = 0.$$

On a : $P(-\infty) > 0$, $P(\infty) > 0$ et $P(0) = f''(k^*)\sigma(c^*)c^* < 0$. Les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont donc réelles ; l'une est négative et l'autre positive. Soit, $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.

La dynamique locale est donc décrite par

$$c_t - c^* = \alpha_1^c \exp(\lambda_1 t) + \alpha_2^c \exp(\lambda_2 t),$$

et

$$k_t - k^* = \alpha_1^k \exp(\lambda_1 t) + \alpha_2^k \exp(\lambda_2 t).$$

Le long de la trajectoire stable, on doit avoir $\alpha_2^c = \alpha_2^k = 0$ (puisque la racine $\lambda_2 > 0$ est celle qui est source d'instabilité). En se plaçant en $t = 0$, on obtient $\alpha_1^c = c_0 - c^*$ et $\alpha_1^k = k_0 - k^*$ (mais attention, seule k_0 est donné initialement). Et donc :

$$c_t - c^* = (c_0 - c^*) \exp(\lambda_1 t), \tag{5.17}$$

et

$$k_t - k^* = (k_0 - k^*) \exp(\lambda_1 t), \tag{5.18}$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 - 4f''(k^*)\sigma(c^*)c^*}}{2}.$$

La vitesse de convergence $|\lambda_1|$ est croissante avec $f''(k^*)\sigma(c^*)c^*$ et décroissante avec θ. Ces conditions sont très proches de celles qui gouvernent la croissance de la consommation. Le planificateur imposera un rythme de convergence rapide si f'' est fortement négative, c'est-à-dire si le rendement du capital varie beaucoup avec le stock de capital (il est très élevé lorsque le stock est bas, ce qui fournit une incitation à réduire la consommation initialement pour l'augmenter dans le futur, et il est faible pour des stocks plus élevés, ce qui incite à consommer le capital) ; si $\sigma(c^*)$ est grand, c'est-à-dire si les ménages acceptent facilement de renoncer à la consommation courante pour consommer plus dans le futur, si la consommation à atteindre c^* est élevée, et enfin θ est grand, de sorte que les ménages sont impatients.

4. L'ÉQUILIBRE DÉCENTRALISÉ

4.1. Le comportement de l'entreprise

L'entreprise se comporte de façon concurrentielle, maximise son profit, et sa technologie est à rendements d'échelle constants :

$$f'(k_t) = r_t, \tag{5.19}$$

$$f(k_t) = r_t k_t + w_t. \tag{5.20}$$

4.2. Le problème du ménage

Le ménage travaille, consomme et transfère de la richesse au cours du temps.

Il choisit une suite $(c_t, t \geqslant 0)$ qui maximise

$$\int_0^\infty u(c_t) \exp(-\theta t) dt \tag{5.21}$$

sous sa contrainte de budget. Pour écrire cette contrainte, notons A_t la richesse agrégée (réelle) à l'instant t. Elle évolue donc selon la loi

$$C_t + \frac{dA_t}{dt} = w_t N_t + r_t A_t.$$

En notant $a_t = A_t/N_t$, de sorte que

$$\frac{1}{a_t}\frac{da_t}{dt} = \frac{1}{A_t}\frac{dA_t}{dt} - n \Rightarrow \frac{1}{N_t}\frac{dA_t}{dt} = \frac{da_t}{dt} + na_t,$$

on obtient l'évolution de la richesse par tête :

$$\frac{da_t}{dt} = w_t - c_t + r_t a_t - na_t. \tag{5.22}$$

Le ménage doit donc choisir $(c_t, t \geqslant 0)$ qui maximise (5.21) sous la contrainte (5.22), avec $c_t \geqslant 0$ et a_0 donné.

La variable a_t s'interprète comme une épargne (si elle est positive) ou comme une dette (si elle est négative). Elle rapporte le taux d'intérêt réel r_t quelle que soit sa forme. On distinguera deux types d'épargne : sous forme de capital et sous forme de prêt ou de dette entre ménages. Soit k_t l'épargne sous forme de capital, et b_t l'épargne sous forme de prêt (ou de dette) entre ménages. Par convention, $b_t > 0$ lorsqu'il s'agit d'un prêt. Aussi : $a_t = k_t + b_t$ pour tout t. Attention ! Il s'agit ici du problème du ménage : on cherche à déterminer ce qu'il demande étant donnés les prix auxquels il fait face ; comme il n'y a pas de banques ou de dette publique, la dette agrégée devra être nulle à l'équilibre.

Le problème du ménage est formellement équivalent au problème du planificateur. Mais, alors que le planificateur faisait face à la contrainte $k_t \geqslant 0$, le ménage ne fait pas face à une telle contrainte sur la variable a_t. En l'absence d'une telle contrainte, la solution du problème du ménage est simple : emprunter un montant a_0 lors de la période initiale de façon à consommer une quantité de biens telle que $u'(c) = 0$, si elle existe, puis maintenir ce montant de consommation lors des périodes suivantes en empruntant la somme nécessaire pour rembourser la dette précédente, les intérêts sur cette dette et payer sa consommation. C'est le comportement de Ponzi : dans ce cas, tout se passe comme si le revenu intertemporel de l'individu explosait. Pour éviter cela, on suppose habituellement que ce revenu ne peut pas être plus grand que sa richesse initiale, a_0, augmentée de la valeur actualisée de ses revenus d'activité. L'annexe 7.3 montre que cette condition revient à imposer que

$$\lim_{t\to\infty} a_t \exp\left(-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right) \geqslant 0.$$

C'est la « contrainte de Ponzi ». Elle a été commentée dans le chapitre 4.

Bien sûr, le ménage sature cette contrainte dès lors que l'utilité marginale de la consommation est positive dans le long terme. On aura donc à l'optimum du ménage :

$$\lim_{t\to\infty} a_t \exp\left(-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right) = 0.$$

Le Hamiltonien s'écrit

$$\mathscr{H}_t = u(c_t)\exp(-\theta t) + \mu_t\left(w_t - c_t + r_t a_t - na_t\right).$$

Ici, c_t est la variable de contrôle, et a_t la variable d'état. Les conditions du premier ordre sont donc :

$$u'(c_t)\exp(-\theta t) - \mu_t = 0,$$

$$(r_t - n)\mu_t + \frac{d\mu_t}{dt} = 0,$$

$$\frac{da_t}{dt} = w_t - c_t + r_t a_t - n a_t.$$

On doit y ajouter la condition de Ponzi :

$$\lim_{t\to\infty} a_t \mu_t = 0.$$

4.3. Optimalité de l'équilibre

À l'équilibre, $a_t = k_t$. Puisque μ_t décroît au taux $r_t - n$, la condition de transversalité est équivalente à la contrainte de Ponzi (l'utilité marginale de la consommation courante étant strictement positive). L'équilibre coïncide avec l'optimum (rappelons que $f(k_t) = w_t + r_t k_t$).

5. DEUX EXERCICES DE POLITIQUE BUDGÉTAIRE

5.1. Dépense financée par un impôt forfaitaire

Supposons que l'État achète g biens par tête à chaque instant et finance ses achats en taxant forfaitairement chaque consommateur d'un montant $\tau = g$ au même instant.

À l'optimum (et donc à l'équilibre), on a :

$$\frac{dc_t}{dt} = (r_t - n - \theta)\sigma(c_t)c_t, \tag{5.23}$$

$$\frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - c_t - nk_t - g, \tag{5.24}$$

et la condition de transversalité,

$$\lim_{t\to\infty} k_t u'(c_t)\exp(-\theta t) = 0, \tag{5.25}$$

est inchangée.

L'équilibre de long terme

Le lieu des paires (c_t, k_t) telles que la consommation reste constante au cours du temps est lui aussi inchangé : la consommation reste constante (lorsqu'elle est positive) si le stock de capital coïncide avec la règle d'or modifiée. Par contre, le lieu des paires (c_t, k_t) telles que le stock de capital par tête reste constant est affecté par la politique : pour tout k_t, la consommation par tête qui maintient le stock de capital par tête est amputée de la dépense publique. À l'équilibre stationnaire de la règle d'or modifiée, il y a éviction complète de la dépense privée.

Comme le montre la figure 3, il y a toujours trois situations stationnaires, et celle qui correspond à la règle d'or modifiée n'existe que pour une dépense publique suffisamment petite.

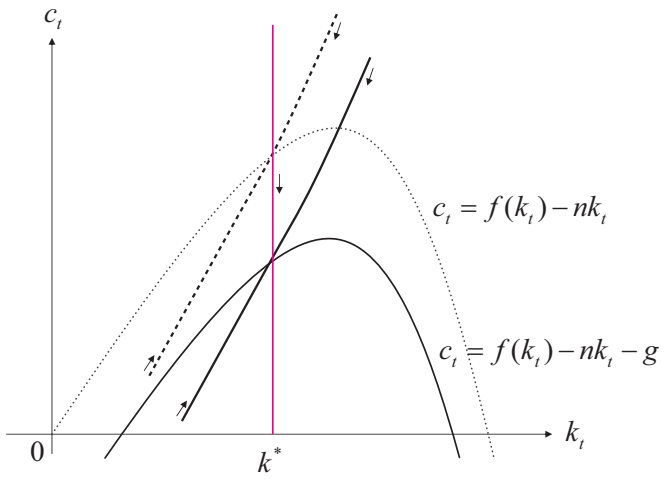


FIGURE 3
Dépense publique financée par un impôt forfaitaire

En outre, pour que l'économie puisse converger vers cet état, il est nécessaire que le stock de capital soit suffisamment élevé initialement (il faut que la consommation publique soit satisfaite initialement). Les mêmes arguments que ceux de la section 3.6 permettent d'éliminer toutes les trajectoires divergentes : la règle d'or modifiée reste un point-selle, et il n'y a pas d'équilibre si la dépense publique est trop élevée par rapport au stock de capital par tête initial.

La transition

Le fait que l'État consomme des biens dès la période initiale fait peser sur l'économie un risque d'instabilité, notamment dans les économies dont le stock de capital par tête est faible initialement. Une stratégie consiste à attendre un certain temps et à mettre en place la politique une fois que l'économie s'est suffisamment développée. La réaction de l'économie au moment où la politique est effectivement mise en place dépend essentiellement d'une seule considération : la politique a-t-elle été annoncée aux agents du secteur privé initialement ou pas ?

Considérons tout d'abord le cas d'une politique non annoncée, et supposons qu'elle est totalement inattendue lorsqu'elle est mise en place[1]. Si, dans la situation initiale, l'économie a déjà atteint l'équilibre stationnaire de la règle d'or modifiée, alors le stock de capital par tête est inchangé et la consommation doit simplement

1. Le statut exact de cette hypothèse est peu défendable : nous avons fait l'hypothèse de prévisions parfaites initialement.

sauter (au moment où la politique est mise en place) de façon à baisser d'un montant juste égal à g. C'est le cas représenté sur la figure 3 ; il est utile de vérifier graphiquement en utilisant le diagramme des phases que toute autre réaction est impossible.

Formellement, le stock de capital par tête ne change pas par (5.23), pour $\sigma(c^*)c^* > 0$, et l'équation d'accumulation (5.24) donne $dc_t = -dg$.

Si, alors que l'économie a déjà atteint l'équilibre stationnaire de la règle d'or modifiée, la hausse des dépenses publiques est temporaire (disons, entre 0 et T), alors comme dans le cas précédent, le stock de capital par tête ne change pas sous l'effet de la politique (ceci résulte toujours de (5.23)). Pour décrire comment réagit la consommation, remarquons tout d'abord que les prix des facteurs ne changent pas ; par conséquent, la politique se traduit uniquement par une perte de revenu. Il est facile de vérifier en intégrant la contrainte budgétaire que la contrainte budgétaire intertemporelle s'écrit (cf. Annexe 7.4) :

$$\int_0^\infty c_t \exp(-\theta t)\, dt = a_0 + w^*\theta^{-1} - \tau\theta^{-1}\left(1 - \exp(-\theta T)\right).$$

La maximisation de (5.21) sous cette (seule) contrainte implique que l'utilité marginale de la consommation reste constante, et donc que la consommation par tête doit rester constante. La contrainte budgétaire précédente donne

$$c\theta^{-1} = a_0 + w^*\theta^{-1} - \tau\theta^{-1}\left(1 - \exp(-\theta T)\right).$$

Par rapport à la consommation par tête (constante) initiale (où $\tau = 0$), la consommation par tête subit une baisse de

$$\Delta c = \tau\left(1 - \exp(-\theta T)\right) > 0.$$

Le ménage a lissé sa consommation au cours du temps en réduisant son effort d'accumulation initial, lorsque son revenu est bas (de 0 à T).

Tout cela nous permet de décrire simplement le cas d'une politique annoncée : en fait, le même argument s'applique si la politique est annoncée en 0 pour être mise en place à partir de la date T, l'agent anticipant la taxe consommant moins dès la période initiale, et utilisant le revenu de son épargne pour s'acquitter de l'impôt (à partir de T) et maintenir sa consommation. Ceci n'est bien sûr que le reflet de la théorie du revenu permanent.

Remarque 5.1a

Si, dans la situation initiale, l'économie ne se trouve pas encore à son état de long terme lorsque la politique est mise en place et qu'elle constitue une surprise, la consommation doit brusquement sauter sur la nouvelle trajectoire point-selle. Le taux de croissance du stock de capital par tête capital (à proximité de l'équilibre stationnaire), qui dépend de $\sigma(c_t)c_t$ au travers de λ_1, ne sera pas affecté si la fonction u est CARA (alors, $\sigma(c)c$ est indépendant de c) ; il l'est sinon. Si, par exemple, $\sigma(c)c$ décroît avec c, la baisse de la consommation conduit à une hausse de $|\lambda_1|$ et accélère donc la convergence vers le nouvel équilibre de long terme.

Remarque 5.1b

Si, dans la situation initiale, l'économie ne se trouve pas encore à son état de long terme et que l'on annonce que la politique sera mise en place plus tard, la mesure est anticipée, la réaction de la consommation est plus lisse, l'économie convergeant de façon à se trouver sur la nouvelle trajectoire point-selle à l'instant où elle est mise en place. Un exemple de transition est représenté sur la figure 4. On annonce en t_0 (l'économie se trouve alors sur la trajectoire point-selle correspondant à la situation initiale, $g = 0$) que la politique sera mise en œuvre en t_1. En t_1, l'économie doit se trouver sur la nouvelle trajectoire point-selle, celle qui correspond à la situation finale. La transition se fait en conformité avec le diagramme des phases de la situation initiale (c'est-à-dire, avant t_1).

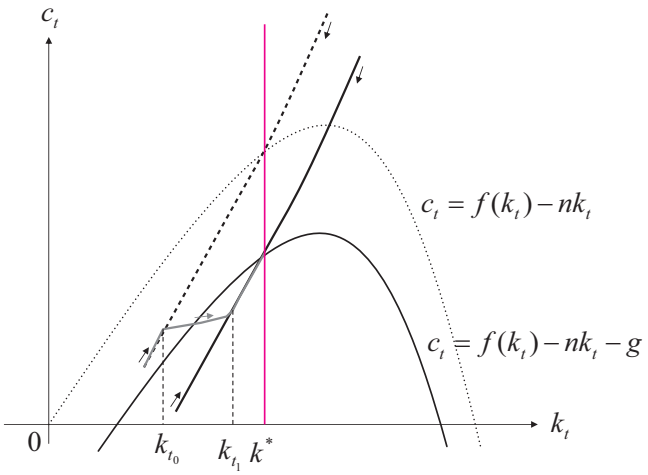


FIGURE 4
Réaction à une politique anticipée

5.2. Dépense financée par un impôt distorsif

Le fait que la dépense publique n'ait aucun effet sur l'accumulation du capital à long terme dépend du mode de financement de la politique : le rendement net du capital, pour les entreprises ou les ménages, n'est pas modifié par l'impôt. Ce mode de financement peut sembler particulièrement irréaliste, même si ici, le revenu du travail étant exogène, l'impôt s'apparente à une taxe sur le salaire acquittée par le ménage.

Examinons maintenant le cas d'un financement par un impôt modifiant le rendement net du capital. Supposons que le revenu du patrimoine $r_t a_t$ soit taxé au taux τ : pour un taux d'intérêt réel r_t, le ménage ne reçoit en fait que $(1-\tau)r_t$. Sa contrainte budgétaire à l'instant t s'écrit donc

$$\frac{da_t}{dt} = w_t - c_t + (1-\tau)r_t a_t - na_t$$

tandis que celle de l'État s'écrit

$$g = \tau r_t a_t.$$

Un équilibre est tel que :

$$\frac{dc_t}{dt} = ((1-\tau)r_t - n - \theta)\sigma(c_t)c_t,$$

$$\frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - nk_t - \tau r_t k_t - c_t,$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t u'(c_t)\exp(-\theta t) = 0,$$

avec $r_t = f'(k_t)$. Clairement, pour $c_t > 0$, le stock de capital stationnaire k^* qui laisse la consommation constante au cours du temps est tel que $(1-\tau)f'(k^*) = n+\theta$; comme $f'' < 0$, k^* est inférieur au stock de la règle d'or modifiée (pour $\tau > 0$). Comme $\tau r_t k_t > 0$, la consommation stationnaire baisse également : elle baisse plus que dans le cas précédent puisque l'État consomme toujours la même quantité de biens et que le stock de capital est cette fois inférieur à la règle d'or modifiée (figure 5).

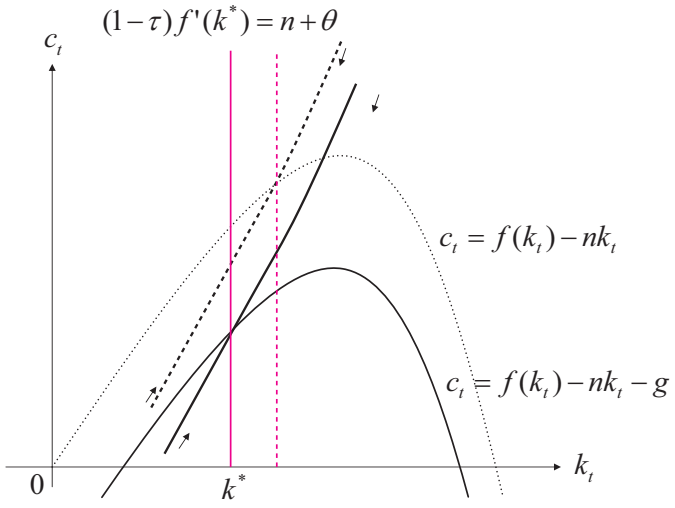


FIGURE 5
Dépense publique financée par un impôt distorsif

6. CONCLUSION

Le modèle à horizon infini constitue un cadre de référence pour décrire les propriétés de la dynamique optimale de la consommation et du capital par tête. Les enseignements de ce modèle sont finalement très intuitifs : lorsque l'économie est initialement faiblement capitalistique, elle devrait réaliser un effort d'accumulation qui pousse à la hausse le rapport capital-travail, mais elle ne devrait jamais le faire au prix d'une baisse de la consommation par tête ; lorsqu'elle est bien dotée en capital par rapport au travail, de sorte que la productivité marginale du capital est basse, l'effort

d'accumulation devrait au contraire être relâché, impliquant une baisse de la consommation par tête satisfaisant des ménages impatients de consommer.

Les deux exercices de politique budgétaire menés dans la section 5 nous incitent, à ce stade, à relativiser les effets de court terme de ce type de mesure. À long terme, ils pénalisent la consommation des ménages sans réussir à augmenter la production par tête. Toutefois, ces dépenses sont supposées improductives et les instruments de financement utilisés sont très caricaturaux ; en particulier, l'État ne recourt pas à l'émission d'une dette publique. C'est l'objet du chapitre suivant d'étudier plus en détail la politique budgétaire.

7. ANNEXES

7.1. Le problème du planificateur

Le problème du planificateur de la section 3.1 consiste à choisir une suite $(c_t, k_t, t \geqslant 0)$ associée à k_0 qui maximise

$$\int_0^\infty u(c_t)\exp(-\theta t)dt$$

sous la contrainte

$$c_t \leqslant f(k_t) - nk_t - \frac{dk_t}{dt}$$

pour tout $t \geqslant 0$.

Le Lagrangien associé s'écrit

$$\mathscr{L} = \int_0^\infty u(c_t)\exp(-\theta t)dt + \int_0^\infty \mu_t\left(f(k_t) - c_t - nk_t - \frac{dk_t}{dt}\right)dt.$$

Le multiplicateur de Lagrange μ_t est associé à la contrainte de réalisabilité en t. À l'optimum, il mesure le supplément d'utilité que l'on retire de pouvoir desserrer la contrainte de la période t en disposant d'une unité de capital supplémentaire ; il représente le prix implicite d'une unité de capital en t. Il est évalué au moment où le planificateur résout son problème, à savoir en 0. Si l'on définit λ_t tel que $\mu_t = \lambda_t \exp(-\theta t)$, λ_t représente le prix implicite d'une unité de capital en t évalué en t.

Dans un problème d'optimisation statique, on maximiserait L par rapport à (c_t, k_t). La maximisation par rapport à k_t pose toutefois problème puisque le Lagrangien dépend de la variation du stock de capital au cours du temps. Pour réécrire le Lagrangien en fonction du niveau du stock de capital, on intègre par partie le dernier terme :

$$\int_0^\infty \mu_t \frac{dk_t}{dt}dt = \lim_{t\to\infty}\{\mu_t k_t\} - \mu_0 k_0 - \int_0^\infty k_t \frac{d\mu_t}{dt}dt.$$

Le Lagrangien se réécrit :

$$\mathscr{L} = \int_0^\infty \left(u(c_t)\exp(-\theta t) + \mu_t\left(f(k_t) - c_t - nk_t\right)\right)dt$$
$$- \lim_{t\to\infty}\{\mu_t k_t\} + \mu_0 k_0 + \int_0^\infty k_t \frac{d\mu_t}{dt}dt.$$

On reconnaît le Hamiltonien défini dans le texte :

$$\mathscr{H}(c_t, k_t) = u(c_t)\exp(-\theta t) + \mu_t\left(f(k_t) - c_t - nk_t\right).$$

Et l'on peut finalement réécrire

$$\mathscr{L} = \int_0^\infty \left(\mathscr{H}(c_t, k_t) + k_t\frac{d\mu_t}{dt}\right)dt - \lim_{t\to\infty}\{\mu_t k_t\} + \mu_0 k_0.$$

En maximisant point par point :

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial c_t} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial c_t} = u'(c_t)\exp(-\theta t) - \mu_t = 0,$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial k_t} = \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial k_t} + \frac{d\mu_t}{dt} = \mu_t\left(f'(k_t) - n\right) + \frac{d\mu_t}{dt} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\{\lambda_t k_t\} = 0.$$

La maximisation par rapport à μ_t donne :

$$f(k_t) - c_t - nk_t - \frac{dk_t}{dt} = 0.$$

Ce sont les conditions du premier ordre du texte.

Une présentation plus rigoureuse est donnée dans Barro et Sala-i-Martin (2003), Annexe A3. En particulier, le statut de la condition de transversalité est plus discuté. Sinon, Kamien et Schwartz (1991) est le texte de référence.

7.2. Élasticité de substitution intertemporelle

Soient c_{t_1} et c_{t_2} la consommation lors des périodes t_1 et t_2 respectivement. Supposons que l'on modifie la consommation en t_1 d'un montant dc_{t_1} et que l'on ajuste la consommation en t_2 d'un montant dc_{t_2} qui laisse l'utilité intertemporelle inchangée :

$$dc_{t_2} = -\frac{\exp(-\theta t_1)}{\exp(-\theta t_2)}\frac{u'(c_{t_1})}{u'(c_{t_2})}dc_{t_1} = -\mathrm{TMS}(c_{t_1}, c_{t_2})dc_{t_1}.$$

Par définition, l'élasticité de substitution entre le bien consommé en t_1 et le bien consommé en t_2 est

$$\sigma(c_{t_1}, c_{t_2}) = -\frac{d\log(c_{t_1}/c_{t_2})}{d\log\mathrm{TMS}(c_{t_1}, c_{t_2})},$$

mesuré le long d'une courbe d'iso-utilité du ménage.

Lorsque la quantité $\mathrm{TMS}(c_{t_1}, c_{t_2})$ de biens supplémentaires en t_2 qui est nécessaire pour compenser le ménage lorsqu'il renonce à consommer une unité de bien en t_1 devient plus grande, le ménage valorise plus le bien consommé en t_1 ; on s'attend à ce que cela se produise lorsqu'il consomme relativement peu en t_1 (c_{t_1}/c_{t_2} est petit). On a donc $\sigma(c_{t_1}, c_{t_2}) \geqslant 0$. Si le $\mathrm{TMS}(c_{t_1}, c_{t_2})$ augmente beaucoup au fur et à mesure que c_{t_1}/c_{t_2} baisse, cela signifie que le bien de t_2 devient moins facilement substituable

au bien de t_1. L'élasticité $\sigma(c_{t_1}, c_{t_2})$ est alors petite ; elle mesure pour cette raison les possibilités de substitution du bien de t_2 au bien de t_1.

Il est facile de calculer cette élasticité :

$$\sigma(c_{t_1}, c_{t_2}) = -\frac{d(c_{t_1}/c_{t_2})}{d\left(u'(c_{t_1})/u'(c_{t_2})\right)} \frac{u'(c_{t_1})/u'(c_{t_2})}{c_{t_1}/c_{t_2}}.$$

Mais, en utilisant le fait que l'utilité intertemporelle ne change pas,

$$\begin{aligned} d\left(\frac{u'(c_{t_1})}{u'(c_{t_2})}\right) &= \frac{u''(c_{t_1})}{u'(c_{t_2})} dc_{t_1} - \frac{u'(c_{t_1})}{u'(c_{t_2})} \frac{u''(c_{t_2})}{u'(c_{t_2})} dc_{t_2} \\ &= \frac{u''(c_{t_1})}{u'(c_{t_2})} dc_{t_1} + \frac{u'(c_{t_1})}{u'(c_{t_2})} \frac{u''(c_{t_2})}{u'(c_{t_2})} \frac{\exp(-\theta t_1)}{\exp(-\theta t_2)} \frac{u'(c_{t_1})}{u'(c_{t_2})} dc_{t_1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\left(\frac{c_{t_1}}{c_{t_2}}\right) &= \frac{dc_{t_1}}{c_{t_2}} - \frac{c_{t_1}}{c_{t_2}} \frac{dc_{t_2}}{c_{t_2}} \\ &= \frac{dc_{t_1}}{c_{t_2}} + \frac{c_{t_1}}{c_{t_2}} \frac{1}{c_{t_2}} \frac{\exp(-\theta t_1)}{\exp(-\theta t_2)} \frac{u'(c_{t_1})}{u'(c_{t_2})} dc_{t_1}. \end{aligned}$$

Lorsque t_2 est arbitrairement proche de $t_1 = t$ (de sorte que c_{t_2} est arbitrairement proche de $c_{t_1} = c_t$), on a :

$$\sigma(c_t) \simeq -\frac{u'(c_t)}{c_t u''(c_t)} \geqslant 0.$$

Au total, lorsque $\sigma(c_t)$ est petit, le ménage est très réticent à l'idée de substituer le bien qu'il va consommer dans un futur arbitrairement proche au bien qu'il consomme aujourd'hui (en t).

7.3. La contrainte de budget intertemporelle

Cette annexe dérive la contrainte de budget intertemporelle du ménage à partir de

$$\frac{da_t}{dt} = w_t - c_t + (r_t - n)a_t.$$

Cette équation est une équation différentielle du premier ordre. Elle se résoud simplement (cf. Michel, section 19.1) en multipliant chacun des deux membres par

$$\exp\left[-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right].$$

On obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(a_t \exp\left[-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right]\right) = (w_t - c_t)\exp\left[-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right].$$

Soit, en intégrant de 0 à T :

$$a_T \exp\left[-\int_0^T (r_\tau - n)d\tau\right] - a_0 = \int_0^T (w_t - c_t)\exp\left[-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right] dt.$$

En utilisant la contrainte de Ponzi, cette équation devient :

$$\int_0^\infty c_t \exp\left[-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right] dt = a_0 + \int_0^\infty w_t \exp\left[-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right] dt.$$

Le membre de gauche s'interprète comme une somme actualisée en 0 des consommations. Le membre de droite représente la richesse totale actualisée. Cette richesse a deux composantes : une composante financière, a_0, et des revenus du travail.

7.4. Chocs anticipés et revenu permanent

La contrainte budgétaire intertemporelle s'écrit

$$\int_0^\infty c_t \exp\left[-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right] dt$$

$$= a_0 + \int_0^\infty w_t \exp\left[-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right] dt - \int_0^T \tau_t \exp\left[-\int_0^t (r_\tau - n)d\tau\right] dt.$$

Pour un salaire w^* et un taux intérêt r^* constants, on obtient :

$$\int_0^\infty c_t \exp(-\theta t)\, dt = a_0 + w^*\theta^{-1} - \tau\theta^{-1}\left(1 - \exp(-\theta T)\right).$$

où l'on a utilisé $r^* - n = f'(k^*) - n = \theta$.

8. EXERCICES ET PROBLÈMES

8.1. Le modèle à horizon infini

La population, N_t, croît au taux n et fournit du travail au salaire réel w_t. Le taux d'intérêt réel sur le capital, K_t, est r_t. Le secteur productif est en concurrence parfaite et utilise une technologie de production à rendements constants, $F(K_t, N_t)$, croissante et concave en chacun de ses arguments. Le bien produit est utilisé pour la consommation et l'investissement. On suppose pour simplifier que le capital ne se déprécie pas.

À la date t, les agents possèdent une richesse totale A_t, qui peut être positive ou négative, et consomment C_t. On note avec des minuscules les variables par tête, par exemple $a_t = A_t/N_t$. La fonction d'utilité intertemporelle de l'agent représentatif est

$$U = \int_0^{+\infty} u(c_t)e^{-\theta t} dt,$$

avec la fonction d'utilité instantanée $u(.)$ vérifiant les conditions usuelles : $u' > 0$, $u'' < 0$, $u'(0) = +\infty$ et $u'(+\infty) = 0$.

1. Exprimez r_t et w_t en fonction de k_t. On définira $f(k) \equiv F(k, 1)$.

2. Écrivez le programme de maximisation de l'agent. On écrira la contrainte de budget en deux parties : l'une contraignant l'évolution de la richesse et l'autre étant une condition terminale.

   Que signifie la condition que l'agent ne joue pas un jeu de Ponzi ?

3. Déterminez la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent. On note a_0 sa richesse initiale.

4. Écrivez le Hamiltonien de ce programme et les conditions du premier ordre.

5. Déduisez-en l'équation d'évolution de la consommation par tête. Commentez.

6. Écrivez la condition d'équilibre sur le marché du capital. En déduire le système d'équations différentielles régissant l'évolution de k_t et c_t. Déterminez les valeurs stationnaires k^* et c^*.

7. Représentez la dynamique de l'économie dans le plan (k_t, c_t).

8. Écrivez le programme du planificateur (omniscient et bienveillant), son Hamiltonien et les conditions du premier ordre.

9. Déterminez les équations d'évolution de la consommation et du capital par tête. Concluez.

10. On introduit maintenant l'État. Il réalise des dépenses publiques G_t, dont on ne tiendra pas compte dans l'utilité des agents, et que nous prenons comme données.

    Ces dépenses sont financées par l'impôt. L'État peut s'endetter, à condition qu'il ait remboursé ses dettes à la fin des temps, et peut donc choisir la répartition des taxes au cours du temps. On note T_t les impôts, et on suppose que la richesse initiale de l'État est nulle.

    Écrivez la contrainte de budget intertemporelle de l'État. En déduire celle de l'agent.

11. Écrivez les équations d'évolution de la consommation et du capital par tête. (On notera B_t la dette publique.)

12. Concluez quant à l'impact de la répartition temporelle des taxes. Discutez ce résultat.

Éléments de correction

1. Les entreprises demandent les quantités de capital K_t^d et de travail N_t^d qui maximisent leur profit

$$F(K_t^d, N_t^d) - r_t K_t^d - w_t N_t^d.$$

   Les conditions du premier ordre sont

$$\begin{aligned} r_t &= F_K(K_t^d, N_t^d), \\ w_t &= F_N(K_t^d, N_t^d). \end{aligned}$$

À l'équilibre des marchés du capital et du travail, $K_t^d = K_t$ et $N_t^d = N_t$. On définit ensuite

$$\frac{F(K_t, N_t)}{N_t} = F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right) \equiv f(k_t).$$

Les conditions du premier ordre se réécrivent alors

$$\begin{aligned} r_t &= f'(k_t), \\ w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t). \end{aligned}$$

2. L'agent maximise son utilité intertemporelle U sous la contrainte d'évolution de sa richesse, écrite entre t et $t + dt$,

$$C_t dt + dA_t \leqslant N_t w_t dt + A_t r_t dt,$$

qui se réécrit

$$C_t + \frac{dA_t}{dt} \leqslant w_t N_t + r_t A_t.$$

Pour passer en variables par tête, on dérive logarithmiquement la relation $A_t = a_t N_t$:

$$\frac{dA_t/dt}{A_t} = \frac{da_t/dt}{a_t} + \frac{dN_t/dt}{N_t} = \frac{da_t/dt}{a_t} + n,$$

d'où

$$c_t + \frac{da_t}{dt} + n a_t \leqslant w_t + r_t a_t.$$

La condition de Ponzi impose que les agents n'aient pas de dettes (en valeur actualisée) à la fin des temps :

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\int_0^t r_s ds} A_t \geqslant 0,$$

qui se réécrit

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} a_t \geqslant 0.$$

Le jeu de Ponzi tient son nom de Charles Ponzi qui monta une escroquerie de grande envergure à Boston dans les années 1920. Il proposait des investissements pour lesquels il promettait un rendement de 40 % en à peine 90 jours. Cette affaire reposait sur un système de vente pyramidale : les investissements des nouveaux entrants servaient à payer les premiers investisseurs. Les sommes promises divergeaient clairement vers $+\infty$, même en valeur actualisée. Il fut envoyé en prison et mourut pauvre.

3. La contrainte de budget se réarrange, en la multipliant par $e^{-\int_0^t (r_s - n) ds}$, en

$$\begin{aligned} (w_t - c_t) e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} &\geqslant \left(\frac{da_t}{dt} - (r_t - n) a_t\right) e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} \\ &= \frac{d}{dt}\left(a_t e^{-\int_0^t (r_s - n) ds}\right). \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et $+\infty$ et en utilisant la contrainte de Ponzi, on obtient

$$\int_0^{+\infty} (w_t - c_t) e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt \geqslant -a_0.$$

Finalement, la valeur actualisée des consommations futures est inférieure ou égale à la richesse totale, somme du capital physique initial et du capital humain initial (égal à la somme actualisée des salaires futurs) :

$$\int_0^{+\infty} c_t e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt \leqslant a_0 + \int_0^{+\infty} w_t e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt.$$

4. Le Hamiltonien s'écrit :

$$H_t = e^{-\theta t} u(c_t) + \mu_t [w_t - c_t + (r_t - n) a_t].$$

Il y a trois conditions d'optimalité : deux conditions du premier ordre,

$$\frac{\partial H_t}{\partial c_t} = 0 = e^{-\theta t} u'(c_t) - \mu_t$$

et

$$\frac{\partial H_t}{\partial a_t} = -\frac{d\mu_t}{dt} = \mu_t (r_t - n),$$

et une condition de transversalité qui vient de la condition de Ponzi,

$$\lim_{t \to +\infty} \mu_t a_t = 0.$$

5. On commence par prendre la dérivée logarithmique de la première condition du premier ordre,

$$-\theta + \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)} \frac{dc_t}{dt} = \frac{d\mu_t}{dt} / \mu_t,$$

et on substitue le terme de droite avec la seconde condition du premier ordre,

$$\frac{dc_t}{dt} = (r_t - n - \theta) \frac{u'(c_t)}{-u''(c_t)} = (r_t - n - \theta) \sigma(c_t) c_t,$$

où $\sigma(c) = -u'(c)/(cu''(c))$ est l'élasticité de substitution intertemporelle.

Le profil de la consommation est d'autant plus croissant que l'agent est patient (petit θ) et que l'épargne rapporte (r_t grand). Le profil de la consommation est d'autant plus plat, c'est-à-dire lissé dans le temps, que l'élasticité de substitution intertemporelle est faible.

6. L'équilibre sur le marché du capital implique que la richesse épargnée par les agents est égale à la quantité de capital utilisée par les firmes : $a_t = k_t$. Donc

$$\frac{dc_t}{dt} = (f'(k_t) - n - \theta) \sigma(c_t) c_t$$

et

$$\frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - c_t - nk_t.$$

Les niveaux stationnaires sont

$$k^* = f'^{-1}(n+\theta) \qquad \text{et} \qquad c^* = f(k^*) - nk^*.$$

7. L'économie est régie par le système différentiel :

$$dc_t/dt = (f'(k_t) - n - \theta)\sigma(c_t)c_t$$
$$dk_t/dt = f(k_t) - c_t - nk_t$$

La consommation saute pour se situer sur la trajectoire selle, puis l'économie suit celle-ci jusqu'à l'état stationnaire.

8. Le programme du planificateur consiste à maximiser U sous la contrainte d'accumulation du capital

$$C_t + \frac{dK_t}{dt} \leqslant F(K_t, N_t),$$

qui se réécrit

$$c_t + \frac{dk_t}{dt} + nk_t \leqslant f(k_t),$$

et sous la contrainte que le stock de capital ne peut être négatif :

$$k_t \geqslant 0.$$

Le Hamiltonien s'écrit

$$H_t = e^{-\theta t}u(c_t) + \mu_t[f(k_t) - c_t - nk_t].$$

Les conditions du premier ordre sont

$$\frac{\partial H_t}{\partial c_t} = 0 = e^{-\theta t}u'(c_t) - \mu_t$$

et

$$\frac{\partial H_t}{\partial k_t} = -\frac{d\mu_t}{dt} = \mu_t(f'(k_t) - n).$$

9. En combinant les équations du premier ordre comme précédemment, on obtient

$$\frac{dc_t}{dt} = (f'(k_t) - n - \theta)\sigma(c_t)c_t,$$

identique au cas décentralisé. L'équation d'évolution du capital est elle aussi la même. La condition de transversalité est maintenant $\lim_{t\to+\infty}\mu_t k_t = 0$, elle est équivalente à celle dans l'économie décentralisée. L'évolution de l'économie est donc régie par les mêmes équations dans les cas centralisé et décentralisé : l'économie de marché (décentralisée) est optimale.

10. La valeur actualisée des dépenses publiques doit être égale à la valeur actualisée des impôts prélevés :

$$\int_0^{+\infty} G_t e^{-\int_0^t r_s ds} dt = \int_0^{+\infty} T_t e^{-\int_0^t r_s ds} dt.$$

En divisant par N_0, on obtient

$$\int_0^{+\infty} g_t e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt = \int_0^{+\infty} t_t e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt.$$

La contrainte de budget intertemporelle de l'agent est maintenant

$$\int_0^{+\infty} c_t e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt = a_0 + \int_0^{+\infty} (w_t - t_t) e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt.$$

En réinjectant la contrainte de l'État dans celle de l'agent, on a

$$\int_0^{+\infty} c_t e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt = a_0 + \int_0^{+\infty} (w_t - g_t) e^{-\int_0^t (r_s - n) ds} dt.$$

11. L'évolution de la consommation est toujours donnée par

$$\frac{dc_t}{dt} = (r_t - n - \theta)\sigma(c_t)c_t.$$

Sur le marché du capital, il y a maintenant un nouvel acteur : l'État demande du capital lorsqu'il s'endette ou en offre lorsqu'il dégage des surplus. L'équilibre du marché du capital s'écrit

$$A_t = B_t + K_t.$$

L'évolution de la richesse des ménages est maintenant

$$\frac{dA_t}{dt} = w_t N_t + r_t A_t - C_t - T_t,$$

et celle de la dette publique est

$$\frac{dB_t}{dt} = r_t B_t + G_t - T_t.$$

En passant en variable par tête et en dérivant l'équation d'équilibre du marché du capital par rapport au temps, on obtient

$$\frac{dk_t}{dt} = f(k_t) - (c_t + g_t) - nk_t.$$

12. Ni la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent, ni les équations d'évolution de la consommation et du capital par tête ne dépendent de la répartition des taxes au cours du temps. Donc celle-ci n'a aucune influence sur l'agent. Seule compte la somme actualisée des taxes.

À dépenses publiques données, le choix de financement entre impôt et déficit public est donc neutre. Ce résultat est connu sous le nom d'équivalence ricardienne[1]. Intuitivement, si l'État finance ses dépenses publiques en faisant du déficit au lieu de lever des impôts, cela revient à augmenter les impôts plus tard pour rembourser la dette publique. Les agents, anticipant cela parfaitement, épargnent exactement le montant que l'État n'a pas prélevé aujourd'hui pour faire face à l'augmentation correspondante des impôts demain. L'épargne totale de l'économie (privée + publique) n'est donc pas affectée.

Ce résultat repose sur des hypothèses fortes, notamment : (i) les taxes sont non distorsives, (ii) les agents sont très rationnels, (iii) l'État ne vit pas plus longtemps et (iv) fait face au même taux d'intérêt que les agents.

8.2. La TVA sociale dans le long terme

Le début du mandat de N. Sarkozy a été marqué par la controverse sur la « TVA sociale ». Le rapport remis par E. Besson en septembre 2007 fait un point sur ce type de mesure. Elle consiste à substituer des recettes de TVA à des cotisations sociales, pour « présenter un niveau de coût du travail compétitif par rapport à des salariés de productivité comparable et garantir un niveau élevé de protection sociale » ; le rapport juge en effet que « notre protection sociale pèse trop lourdement sur les salaires ».

Les cotisations sociales sont assises sur les salaires. Le coût du travail devrait donc baisser avec elles. Cependant, une hausse de la TVA, en réduisant la demande agrégée, peut conduire à une baisse du prix hors taxe qui vient cette fois renchérir le coût réel du travail. Le rapport cherche à évaluer si la TVA sociale peut au final être « favorable à la croissance, l'emploi et au pouvoir d'achat ». Il note que la « littérature académique comme les travaux de modélisation analytique sur la question aboutissent en général à l'idée de neutralité à long terme d'un changement homogène d'assiette à rendement fiscal globalement neutre ».

L'objectif du problème qui suit est de porter un premier regard sur cette assertion : on examine l'effet de la politique sur l'emploi, la croissance et le pouvoir d'achat à l'équilibre dans le long terme d'une économie fermée (bien que, dans le débat public, l'on ait très souvent insisté sur le gain de compétitivité que la France pourrait éventuellement enregistrer, nous allons le négliger).

On utilise une version simple du modèle de croissance optimale de Ramsey sans croissance démographique ($n = 0$). Il y a trois agents : une entreprise, l'État, et un ménage représentatif.

1. *Les assiettes des deux prélèvements.* À l'aide des documents 6, 7 et 8, justifiez que la TVA peut être décrite par une taxe unique τ_v sur la consommation du ménage. En vous appuyant sur les documents 8 et EX :COTIS, justifiez que l'on modélise les cotisations sociales comme payées intégralement par l'employeur

1. Du nom de l'économiste anglais David Ricardo (1772-1823) qui a énoncé le premier ce principe de neutralité, mais qui ne croyait pas qu'il s'appliquait en pratique.

et proportionnelles au salaire w_t perçu par le ménage en t ; vous noterez τ_c le taux de cotisations sociales.

2. *Le comportement de l'entreprise.* L'entreprise est supposée se comporter de façon concurrentielle. Soient K_t le stock de capital agrégé à l'instant t, L_t la quantité de travail, et $F(K_t, L_t)$ la production à cet instant ($t \geqslant 0$). La fonction de production a les propriétés habituelles : elle est croissante avec chacun de ses arguments, concave, et les rendements d'échelle sont constants. Le stock de capital initial K_0 est donné. Le prix hors taxe du bien produit est posé égal à 1 (c'est le prix récupéré par l'entreprise). En notant w_t le salaire réel net de cotisations sociales, r_t le taux d'intérêt réel, et δ le taux de dépréciation du capital, écrivez le profit de l'entreprise en t. En notant $k_t = K_t/L_t$ le rapport capital/travail en t, et $f(k_t) = F(k_t, 1)$, écrivez les conditions du premier ordre associées au problème de l'entreprise.

3. *L'État.* L'État effectue un transfert social réel T_t au ménage, achète une quantité G_t de biens, et prélève des taxes. Il y a deux types de taxes : les cotisations sociales et la TVA. Pour l'instant, nous faisons abstraction de la dette publique. En supposant que le budget de l'État est équilibré à chaque instant, écrivez la contrainte de budget de l'État en t.

4. *Le comportement du ménage : un cas polaire.* Nous allons commencer par étudier un cas simple dans lequel les préférences du ménage sont représentées par la fonction d'utilité
$$\int_0^\infty u(C_t)\exp(-\theta t)\,dt$$
en 0, où C_t est la consommation agrégée. On supposera que l'offre de travail L_t est limitée par la contrainte $0 \leqslant L_t \leqslant \bar{L}$ pour tout t. Soit A_t les actifs détenus par le ménage en t. Ces actifs sont rémunérés au taux d'intérêt r_t. Écrivez la loi d'évolution de A_t. Écrivez le problème d'optimisation que doit résoudre le ménage, et les conditions du premier ordre associées à ce problème (vous imposerez une contrainte de Ponzi sur la valeur des actifs dans le long terme). Vous noterez μ_t le supplément d'utilité que le ménage retirerait en 0 d'une unité d'actif supplémentaire en t, évalué à l'optimum du problème du ménage.

5. *L'équilibre.* On supposera dorénavant que $G_t = G$ et $T_t = T$. Définissez un équilibre (intertemporel avec prévisions parfaites) de l'économie décrite ci-dessus. Vous noterez $\sigma(C_t)$, $\sigma(C_t) > 0$, l'élasticité de substitution instantanée de la consommation. Exprimez la loi d'évolution de la consommation au cours du temps en fonction de $\sigma(C_t)$, r_t et θ. Montrez que la dynamique du capital agrégé et de la consommation agrégée sont indépendantes de τ_c et τ_v. En remarquant qu'en un équilibre stationnaire le rapport capital/travail reste constant au cours du temps, définissez un tel équilibre. Quelle est alors la valeur prise par le rapport capital/travail ? Situez-la par rapport au rapport au stock k^* qui prévaudrait à la règle d'or modifiée d'accumulation du capital (vous admettrez la valeur de k^* sans la redémontrer). Au final, qu'en concluez-vous sur l'assertion du rapport Besson concernant l'efficacité réelle de la TVA sociale ?

6. *Économie de la TVA sociale : une intuition.* Sans calculs. Remarquez que le salaire net de cotisations, augmenté des cotisations sociales, que l'on appelle la « rémunération des salariés » dans les Comptes Nationaux, est indépendant des deux taux τ_c et τ_v dans le long terme. Comment réagit le salaire perçu par le ménage lorsque le taux de cotisations sociales baisse ? En vous rapprochant des documents 11 et 13, que pensez-vous maintenant de l'assertion du rapport Besson ?

   L'objectif de la suite du problème est de mieux cerner les conditions d'efficacité de la TVA sociale, et d'en prédire les effets sur l'emploi.

7. *Le problème du ménage.* On considère pour le ménage le même problème que précédemment, mais on suppose maintenant que ses préférences sont représentées par la fonction d'utilité

$$\int_0^\infty (u(C_t) - v(L_t)) \exp(-\theta t) dt,$$

   où $u' > 0$, $u'' < 0$, $v' > 0$, et $v'' > 0$. Remarquez que l'offre de travail L_t est, comme la consommation, une variable de contrôle ; on écrira la condition du premier ordre associée à l'offre de travail de façon analogue à celle qui est associée à la consommation. Écrivez alors les conditions du premier ordre du problème du ménage.

8. *L'évolution de l'emploi.* Exprimez la loi d'évolution de l'offre de travail au cours du temps en fonction de l'élasticité de substitution instantanée de l'offre de travail, $\psi(L_t)$, de r_t, θ, et du taux de croissance du salaire net.

9. *L'équilibre de long terme.* Caractérisez un équilibre stationnaire de l'économie. Quelle est la valeur du rapport capital/travail en un tel équilibre ? Comment évoluent les variables agrégées au cours du temps ? Sont-elles indépendantes de la fiscalité, ici résumée à (τ_c, τ_v) ?

10. *Le salaire réel pour le ménage.* Écrivez le salaire réel perçu par le ménage en fonction de τ_c, τ_v et de k^* à l'équilibre de long terme. Comment réagit-il à une modification quelconque $(d\tau_c, d\tau_v)$ des deux taux de taxe ?

    Supposons que le bien de consommation et le loisir soient tous les deux normaux. Décrivez (de façon littéraire) l'effet de revenu et de substitution associés à une hausse du salaire réel pour le ménage. Si l'effet de substitution relatif à la réaction de l'offre de travail à une variation du salaire est dominant, montrez que l'emploi, le stock de capital agrégé et la production et la consommation s'élèvent si et seulement si le salaire réel s'élève pour le ménage. En utilisant le document 6, cette dernière hypothèse vous semble-t-elle plausible ?

11. *La condition d'efficacité de la TVA sociale.* On dira que, dans la variante française de la TVA sociale, les dépenses publiques et les transferts sociaux restent inchangés ($dG = dT = 0$) en réponse à la mesure $(d\tau_c, d\tau_v)$. À l'aide du document 7, pensez-vous que cela soit justifié ? En utilisant la contrainte de budget de l'État, exprimez $d\tau_v$ en fonction de $d\tau_c$ dans la variante française. Pour cela, vous raisonnerez *ex ante* : vous supposerez que l'État équilibre ses comptes

"doc" — 2011/6/20 — 14:57 — page 151 — #159

en supposant que la consommation C^* et la masse salariale w^*L^* sont fixées à leurs valeurs initiales (de long terme). En reprenant le résultat de la question 10, donnez une condition nécessaire et suffisante pour que l'emploi s'élève.

Résumez le mécanisme économique à l'œuvre.

12. *Ordres de grandeur.* On cherche maintenant à avoir un ordre de grandeur de l'effet sur l'emploi que l'on peut attendre de la variante française. Pour cela, écrivez le taux de croissance de l'emploi à long terme en fonction de celui du taux de cotisations, $d\tau_c/(1+\tau_c)$, des variables agrégées, des taux de taxe, et des deux élasticités $\sigma(C^*)$ et $\psi(L^*)$. Que se passe-t-il lorsque où $\sigma(C^*) \to 0$ et/ou $\psi(L^*) \to 0$. Commentez.

13. *L'effet sur l'emploi.* En utilisant les documents appropriés, donnez un ordre de grandeur approximatif pour le taux de croissance de l'emploi que l'on peut attendre d'une baisse de 1 point de cotisations sociales ($d\tau_c = -0.01$). En utilisant le document 10, donnez un ordre de grandeur approximatif pour la hausse de l'emploi total correspondante ?

    Quelles mises en garde feriez-vous en proposant ce résultat ? Vous pourrez discuter (de façon informelle) ce qui se passerait si le salaire w_t était fixé (au niveau du SMIC).

14. *Dette publique et TVA sociale allemande.* On introduit maintenant la dette publique dans l'analyse. Donnez la loi d'évolution de la dette publique B_t au cours du temps. À quoi est égal le stock d'actifs A_t détenu par le ménage en t à l'équilibre ? Définissez l'équilibre de long terme dans lequel la dette publique reste constante au cours du temps.

    L'Allemagne, en janvier 2006, s'est engagée dans une variante de TVA sociale. Cette variante devrait-elle être préférée à la variante française, au moins si l'on cherche une mesure « favorable à la croissance, l'emploi et au pouvoir d'achat » ?

Les documents fournis en annexe sont extraits de :

Document 1 : Conseil des Impôts, La Taxe sur la Valeur Ajoutée, XIXème rapport, juin 2001.

Document 2 : Besson, E., La TVA sociale, Secrétariat d'état chargé de la prospective et de l'évaluation des politiques publiques, septembre 2007.

Document 3 : DREES, Les comptes de la protection sociale en 2005, octobre 2006.

Documents 4 et **8** : INSEE, Comptes de la Nation 2006.

Document 5a et 5b : Blundell, R. et T. MaCurdy, 1999, Labor supply : A review of alternative approches, Handbook of Labor Economics, vol. 3A, Ch. 27, Elsevier.

Document 6 : Blundell, R., A. Duncan, et C. Meghir, 1992, Taxation and empirical labour supply models : Lone parents in the UK, Economic Journal 102, 265-278.

Document 7 : Arthuis, J., Comment redonner de la compétitivité à l'économie française ?, Rapport d'information du sénat 283, mars 2007.

II. – La TVA n'est pas assise sur la totalité de la valeur ajoutée

Le mécanisme de *paiement fractionné* (à chaque stade du processus de production) décrit précédemment a pour conséquence que l'assiette de la TVA n'est pas la valeur ajoutée mais la consommation, ou plus précisément :

- la consommation finale et la formation brute de capital fixe (FBCF) des ménages ;

- les consommations intermédiaires et la FBCF des administrations publiques, sauf pour leurs activités assujetties[8].

Pourquoi taxer la consommation ?

La consommation offre certains avantages remarquables en tant qu'assiette fiscale :

- les taxes à la consommation ont une assiette très large et permettent d'obtenir un rendement élevé pour des taux relativement bas, ce qui limite les distorsions induites par la fiscalité. Ce rendement est en outre assez stable, la consommation étant moins volatile que d'autres assiettes fiscales (par exemple les salaires) lorsque la conjoncture évolue.

- la taxation de la consommation présente des avantages dans la perspective de la concurrence fiscale, car la consommation est une assiette relativement peu mobile par rapport au capital et au travail qualifié. Les consommateurs n'utilisent d'ailleurs pas la totalité des possibilités d'arbitrage dont ils disposent, par exemple en raison d'écarts de taux de TVA entre Etats (cf première partie, chapitre II).

- taxer la consommation ne modifie pas les arbitrages des agents économiques entre épargne et consommation, alors que la taxation des revenus (du travail et du capital) tend à défavoriser l'épargne.

Pour autant, comme tout impôt non forfaitaire, les taxes sur la consommation (et notamment la TVA) ne sont jamais « neutres », dans la mesure où elles induisent des pertes de bien-être économique[9].

La propriété de « neutralité » de la TVA souvent évoquée ne concerne que les producteurs, qui ont la possibilité de déduire la TVA acquittée en amont (sauf dans les cas, non négligeables en pratique, de « rémanences » de TVA[10]). En conséquence, les échanges entre producteurs se font hors taxes, et les consommations intermédiaires ne sont pas taxées : la TVA ne perturbe donc pas les arbitrages des entreprises (propriété dite d'efficacité productive).

---

[8] en pratique, la TVA touche aussi une fraction des consommations intermédiaires et des investissements des entreprises (phénomène dit de « rémanence », qui sera analysé plus en détail au chapitre III de la première partie). Mais il s'agit d'exceptions qui ne remettent pas en cause le principe général de la taxe.

[9] qu'il convient bien sûr de comparer aux bénéfices attendus des dépenses publiques financées à l'aide des recettes fiscales.

[10] cf première partie, chapitre III

FIGURE 6
La collecte de la TVA 1/2

"doc" — 2011/6/20 — 14:57 — page 153 — #161

La valeur ajoutée VA peut être décomposée de la manière suivante :

VA = C + G + I + X – M où C est la consommation finale des ménages, G la consommation finale des administrations, I l'investissement, X le montant des exportations et M le montant des importations de biens et services.

L'assiette de la TVA est C + CI_{adm} (consommations intermédiaires des administrations publiques) + I_{adm} (FBCF des administrations) + $I_{ménages}$ (FBCF des ménages), ce qui est égal à :

VA – (I - I_{adm} - $I_{ménages}$) – (G –CI_{adm}) + M – X.

Autrement dit, la TVA ne taxe pas l'ensemble de la valeur ajoutée. D'une part, elle exonère la part de cette valeur ajoutée incorporée aux investissements des entreprises et aux exportations de biens et services, ainsi qu'une partie de la valeur ajoutée des administrations publiques. D'autre part, elle taxe la valeur ajoutée générée à l'étranger et incorporée aux importations.

III. – Les taux de TVA

Le taux de TVA est un paramètre propre à chaque transaction taxable, ce qui implique qu'un assujetti puisse être amené à utiliser plusieurs taux différents. Trois taux de TVA sont actuellement applicables en France : le taux normal de 19,6 %, le taux réduit de 5,5 % et le taux super-réduit de 2,1 % (sans compter les taux spécifiques à la Corse et aux DOM[11]).

Le taux réduit s'applique à différentes catégories d'opérations limitativement énumérées (article 278 bis du CGI), notamment (liste non exhaustive) :

- certains biens et services de consommation courante (l'eau, l'essentiel des produits alimentaires, les transports de voyageurs, les abonnements à l'électricité et au gaz, les médicaments non remboursables) ou à caractère social (prestations des avocats dans le cadre de l'aide juridictionnelle, prestations des maisons de retraite).

- certains produits culturels (livres, entrées dans les spectacles, entrées dans les musées, etc.) ;

- la fourniture de logement en hôtel ou en meublé ;

- depuis 1999, les travaux portant sur des locaux à usage d'habitation achevés depuis plus de deux ans.

Le taux super-réduit s'applique principalement aux publications de presse, à la redevance de l'audiovisuel et aux médicaments remboursables par la Sécurité sociale[12].
redevable (cf deuxième partie, chapitre III).

FIGURE 7
La collecte de la TVA 2/2

Rendement de la TVA et des cotisations sociales, 2005 et 2006

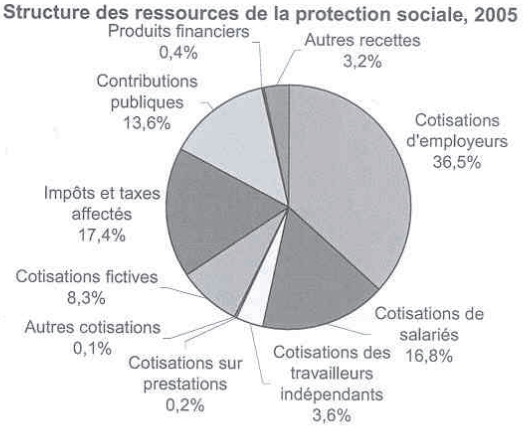
En milliards d'euros	2005	2006
Produit intérieur brut	1718	1792
TVA (nette des remboursements)	127	128
Cotisations de sécurité sociale (régime général) Dont cotisations patronales		

Valeur du point

En milliards d'euros	2005	2006
1 point de taux normal	5,8	5,9
1 point de taux réduit	2,3	2,4
1 point de cotisations pour les salariés du secteur privé (hors salariés agricoles).		

Sources : Rapport sur les comptes de la sécurité sociale, juillet 2007 ; Loi de finances 2007, calculs CAS.

Structure des ressources de la protection sociale, 2005



Source DREES, Comptes de la protection sociale 2005 (octobre 2006)

FIGURE 8
La répartition des recettes de TVA et des cotisations sociales

	Montants en millions d'euros					
	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Cotisations totales	**284 830**	**299 385**	**312 429**	**323 763**	**333 749**	**345 565**
• Cotisations effectives	246 568	259 882	271 280	281 002	289 749	301 910
Cotisations d'employeurs	160 482	167 823	174 275	180 476	185 717	192 776
Cotisations de salariés	70 074	74 560	79 094	82 032	84 546	88 415
Cotisations des travailleurs indépendants	14 765	16 165	16 506	17 034	17 796	18 922
Cotisations sur prestations	928	952	974	996	1 080	1 166
Autres cotisations	319	382	431	464	610	631
• Cotisations imputées	38 262	39 503	41 149	42 761	43 999	43 655
Impôts et taxes affectés	82 795	89 924	92 477	94 505	83 083	91 680
Contributions publiques	48 438	47 414	50 064	51 625	70 615	71 531
Produits financiers	2 193	2 371	2 425	2 151	1 926	1 983
Autres recettes	14 108	14 424	14 408	14 726	16 002	16 933
Total des ressources (hors transferts)	**432 364**	**453 517**	**471 803**	**486 769**	**505 374**	**527 692**

(1) : évolution en moyenne annuelle.
Source : DREES, Comptes de la protection sociale.

FIGURE 9
Extrait des comptes de la protection sociale

Tableau Économique d'Ensemble : comptes courants de l'année 2006

	Emplois	S1 Économie nationale
Compte de production		
P6	Exportations de biens et services	481,1
P7	Importations de biens et services	507,0
P1	Production	3 234,2
P2	Consommation intermédiaire	**1 634,1**
D21N	Impôts moins subventions sur les produits [1]	191,9
B1	**Valeur ajoutée brute**	**1 600,0**
PIB	**Produit intérieur brut**	**1 792,0**
K1	Consommation de capital fixe	**237,1**
B1n	**Valeur ajoutée nette**	**1 363,0**
PIN	**Produit intérieur net**	**1 554,9**
B11	**Solde extérieur de biens et services**	**25,8**
Compte d'exploitation		
D1	Rémunération des salariés	**930,7**
D11	Salaires et traitements	**683,2**
D12	Cotisations sociales employeurs	**247,5**
D2	Impôts sur la production et les importations [1]	**280,5**
D3	Subventions [1]	**-36,1**
B2	**Excédent brut d'exploitation**	**497,4**
B3	**Revenu mixte brut**	**119,4**
B2n	**Excédent net d'exploitation**	**276,2**
B3n	**Revenu mixte net**	**103,6**
Compte de distribution secondaire du revenu		
D5	Impôts courants sur le revenu et le patrimoine	**209,3**
D61	Cotisations sociales	**367,2**
D611	Cotisations sociales effectives	**321,7**
D612	Cotisations sociales imputées	**45,5**
D62	Prest. soc. autres que transf. sociaux en nature	**355,8**
D7	Autres transferts courants	**518,6**
D71	Primes nettes d'assurance dommage	**29,6**
D72	Indemnités d'assurance dommage	**29,7**
D73	Transf. courants entre administrations publiques	**345,3**
D74	Coopération internationale courante	**6,6**
D75	Transferts courants divers	**107,3**
B6	**Revenu disponible brut**	**1 779,2**
B6n	**Revenu disponible net**	**1 542,2**
Compte d'utilisation du revenu		
P3	Dépense de consommation finale	**1 440,2**
P31	Dépense de consommation finale individuelle	**1 292,5**
P32	Dépense de consommation finale collective	**147,7**
Compte de capital		
B8	**Epargne brute**	**339,0**
B12	**Solde extérieur courant**	**38,5**
P51	Formation brute de capital fixe	**366,4**
K1	Consommation de capital fixe	**-237,1**
P52	Variations des stocks	**10,3**
B9A	**Capacité (+) ou besoin (-) de financement**	**-37,8**
B0	**Ajust. comptes non financiers et financiers**	**4,4**

Source: Insee, comptes nationaux, base 2000

FIGURE 10
Tableau Économique d'Ensemble (2006)

The elasticity of the labor supply of married men.

Authors	Sample	Uncompensated wage elasticity	Income elasticity
Hausman (1981)	U.S.	[0; 0.03]	[−0.95; −1.03]
Blomquist (1983)	Sweden	0.08	[−0.03; −0.04]
Blundell and Walker (1986)	U.K.	0.024	−0.287
Triest (1990)	U.S.	0.05	0
Van Soest et al. (1990)	Netherlands	0.12	−0.01

Source: Blundell and MaCurdy (1999, table 1, pp. 1646–1648).

FIGURE 11
Sensibilité de l'offre des travail des hommes mariés

The elasticity of the labor supply of married women.

Authors	Sample	Uncompensated wage elasticity	Income elasticity
Hausman (1981)	U.S.	0.995	−0.121
Arrufat and Zabalza (1986)	U.K.	2.03	−0.2
Blundell et al. (1988)	U.K.	0.09	−0.26
Arellano and Meghir (1992)	U.K. (young children)	0.29	−0.40
Triest (1990)	U.S.	0.97	−0.33
Bourguignon and Magnac (1990)	France	[0.05; 1]	[−0.2; −0.3]

Source: Blundell and MaCurdy (1999, table 2, pp. 1649–1651).

FIGURE 12
Sensibilité de l'offre des travail des femmes mariées

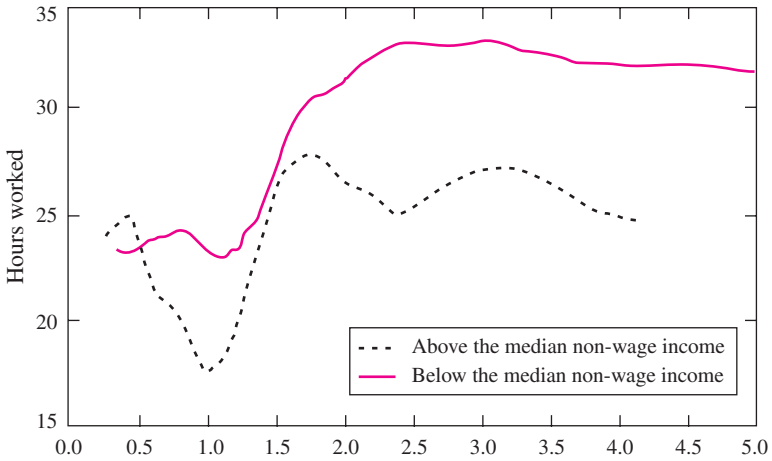


FIGURE 13
Offre des travail des femmes célibataires

1.702 Population, emploi et chômage, France entière (y compris DOM)

	2005(**)	2006(**)
Population moyenne (*)	62 818,2	63 195,5
Population active résidente	28 228,8	N.D.
dont chômeurs	2 917,0	N.D.
dont population active occupée (***)	25 311,7	N.D.
dont salariés	23 058,5	N.D.
dont non salariés	2 253,2	N.D.

Milliers de personnes

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

FIGURE 14
Quelques données relatives à l'emploi

Éléments de correction

1. L'assiette de la TVA est composée essentiellement de la consommation finale des ménages et de celle de l'État. Mais comme l'État se paye de la TVA à lui-même, il semble raisonnable de ne pas la prendre en compte (cf. question 3 pour une justification). Le document 2 indique qu'environ 90 % des recettes de TVA proviennent du taux normal.

   Pour les cotisations, 2/3 d'entre elles sont à la charge des employeurs. Leur base est bien le salaire. Ici, contrairement à la TVA, l'hypothèse d'un taux de cotisations unique est plus contestable.

2. Le problème de l'entreprise est de choisir (K_t, L_t) qui maximise son profit en t, $F(K_t, L_t) - (1+\tau_c) w_t L_t - (r_t + \delta) K_t$.

   Les conditions du premier ordre s'écrivent

   $$f'(k_t) = r_t + \delta, \tag{5.26}$$

   $$(1+\tau_c) w_t = f(k_t) - (r_t + \delta) k_t, \tag{5.27}$$

   avec $k_t = K_t / L_t$.

3. Les recettes de TVA sont $\tau_v (C_t + G)$, et les cotisations sociales s'élèvent à $\tau_c w_t L_t$. En l'absence de dette publique, la contrainte de budget de l'État s'écrit donc $\tau_v (C_t + G_t) + \tau_c w_t L_t - (1+\tau_v) G_t - T_t = 0$ en t. Soit :

   $$\tau_v C_t + \tau_c w_t L_t - G_t - T_t = 0. \tag{5.28}$$

4. En l'absence de désutilité du travail, $L_t = \bar{L}$. La loi d'évolution des actifs s'écrit

   $$(1+\tau_v) C_t + \frac{dA_t}{dt} = w_t \bar{L} + r_t A_t + T_t.$$

   Le Hamiltonien du problème est

   $$u(C_t) \exp(-\theta t) + \mu_t \left(w_t \bar{L} + r_t A_t + T_t - (1+\tau_v) C_t \right)$$

Les conditions nécessaires du premier ordre sont :

$$u'(C_t)\exp(-\theta t) - \mu_t(1+\tau_v) = 0, \tag{5.29}$$

$$\mu_t r_t + \frac{d\mu_t}{dt} = 0, \tag{5.30}$$

$$(1+\tau_v)C_t + \frac{dA_t}{dt} = w_t L_t + r_t A_t + T_t, \tag{5.31}$$

avec la contrainte de Ponzi,

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t A_t \geqslant 0. \tag{5.32}$$

5. À l'équilibre, les équations (5.26) à (5.31) sont satisfaites, et l'on a :

$$A_t = K_t \tag{5.33}$$

$$L_t = \bar{L} \tag{5.34}$$

La dynamique de la consommation s'obtient à partir de (5.29) à (5.30) :

$$\frac{1}{C_t}\frac{dC_t}{dt} = (r_t - \theta)\sigma(C_t), \tag{5.35}$$

avec $1/\sigma(C_t) = -C_t u''(C_t)/u'(C_t) > 0$. C'est l'équation d'Euler.
Celle du capital s'obtient en consolidant (5.28) et (5.31) :

$$C_t + \frac{dK_t}{dt} + G_t = F(K_t, \bar{L}) - \delta K_t. \tag{5.36}$$

À long terme, $k_t = k$ indépendant de t. Il suit de (5.26) que $r_t = r$; de (5.27) que le coût réel du travail est $(1+\tau_c)w$ pour tout t ; pour K_t constant, (5.36) donne C_t constant (pour $G_t = G$) ; et enfin, (5.35) implique que $r = \theta$. L'économie se trouve à la règle d'or modifiée ($k = k^*$), il y a éviction complète de la demande privée par la demande publique, et les variables agrégées ne sont pas affectées par la mesure. L'assertion du rapport Besson est donc correcte.

6. Le coût du travail $(1+\tau_c)w_t$ est égal à $f(k_t) - (r_t+\delta)k_t$, et donc à $f(k^*) - (\theta+\delta)k^*$ à long terme. Si le taux de cotisations baisse, le salaire w^* pour le ménage doit augmenter. Ceci n'a pas d'effet ici parce que l'offre de travail est inélastique. Le document 5 suggère que l'élasticité de l'offre de travail est faible, mais pas nulle. En principe, l'économie va donc répondre à la mesure, mais par continuité avec le cadre précédent, la mesure devrait avoir peu d'effet. Question : est-ce que cela peut malgré tout venir nuancer l'assertion du rapport Besson ?

7. Le Hamiltonien s'écrit

$$(u(C_t) - v(L_t))\exp(-\theta t) + \mu_t\left(w_t L_t + r_t A_t + T_t - (1+\tau_v)C_t\right).$$

Les conditions nécessaires du premier ordre sont (5.29) à (5.32), et

$$-v'(L_t)\exp(-\theta t) + \mu_t w_t = 0. \tag{5.37}$$

8. On utilise (5.30) et (5.37). En procédant comme pour obtenir l'équation d'Euler associée à la consommation, on obtient :

$$-\frac{\dot{L}_t}{L_t} = \left(r_t - \theta - \frac{\dot{w}_t}{w_t}\right)\psi(L_t), \tag{5.38}$$

où $1/\psi(L_t) = L_t v''(L_t)/v'(L_t) > 0$.

9. En un équilibre stationnaire (et en l'absence de croissance démographique),

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{\dot{L}_t}{L_t} = 0.$$

Il suit de (5.26) que le taux d'intérêt réel reste constant au cours du temps, et donc, par (5.27), que le coût du travail et le salaire réel net w_t le sont aussi : $r_t = r$ et $w_t = w$.

En formant le rapport de (5.29) et (5.37), on obtient :

$$\frac{u'(C_t)}{v'(L_t)} = \frac{1+\tau_v}{w_t} \Rightarrow \frac{\dot{C}_t}{C_t} = -\frac{\sigma(C_t)}{\psi(L_t)}\frac{\dot{L}_t}{L_t} = 0.$$

De (5.35) et (5.38), avec $\dot{w}_t = 0$, on a en outre :

$$0 = \frac{1}{\sigma(C_t)}\frac{\dot{C}_t}{C_t} = -\frac{1}{\psi(L_t)}\frac{\dot{L}_t}{L_t} = (r-\theta) \Rightarrow r = \theta.$$

Le rapport capital/travail est à nouveau fixé à la règle d'or modifiée. Les variables agrégées restent constantes au cours du temps. On les note K^*, L^*, C^*. Et $(1+\tau_c)w = f(k^*) - \theta k^*$ (avec k^* tel que $f'(k^*) = \theta$ fixé) est fixé. On retrouve des résultats qui semblent très proches de ceux des questions précédentes. Mais, cette fois, l'offre de travail étant endogène, les variables agrégées vont répondre à la politique.

10. L'hypothèse d'un effet de substitution dominant est plausible si le salaire n'est pas trop élevé. Le salaire réel pour le ménage est

$$\frac{w^*}{1+\tau_v} = \frac{f(k^*) - (\theta+\delta)k^*}{(1+\tau_c)(1+\tau_v)}$$

Le numérateur est donné (cf. question précédente). Par contre, le dénominateur dépend de τ_c et τ_v. On a :

$$d\left(\frac{1+\tau_v}{w^*}\right) = \frac{(1+\tau_c)\,d\tau_v + (1+\tau_v)\,d\tau_c}{f(k^*) - (\theta+\delta)k^*}.$$

Une hausse du salaire réel induit un effet de revenu et un effet de substitution. Par l'effet de revenu, la consommation s'élève et le travail offert baisse. Par l'effet de substitution, une hausse du salaire réel s'assimile à une hausse du prix du loisir, et induit une baisse du loisir et une hausse de la consommation. La

consommation augmente, et si l'effet de substitution est dominant, le travail augmente.

Puisque $K^* = k^* L^*$, où k^* est le stock de capital par tête de la règle d'or, le stock de capital s'élève dans la même proportion que l'emploi. Et l'hypothèse de rendements d'échelle constants implique que la production s'élève aussi dans cette proportion.

11. En différentiant $\tau_v C_t + \tau_c w_t L_t - G_t - T_t = 0$, on obtient

$$d\tau_v = -\frac{w^* L^*}{C^*} d\tau_c. \tag{5.39}$$

Il s'ensuit que

$$d\left(\frac{1+\tau_v}{w^*}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{(1+\tau_c)\, w^* L^*}{(1+\tau_v)\, C^*} - 1\right) d\tau_c < 0. \tag{5.40}$$

Dans l'acception française, la politique est vue comme une substitution de la TVA à des cotisations sociales à budget constant, c'est-à-dire sans variation de la dépense totale, que l'on interprètera ici comme dépense publique augmentée des transferts, le tout mesuré en termes réels. Pour une baisse des cotisations sociales ($d\tau_c < 0$), le salaire réel s'élève si et seulement si $(1+\tau_c)\, w^* L^* < (1+\tau_v)\, C^*$, c'est-à-dire si le coût du travail est initialement plus petit que la consommation.

Le mécanisme à l'œuvre est donc le suivant. La TVA sociale n'influence pas le coût du travail dans le long terme. Toute baisse du taux de cotisations doit donc se solder par une hausse du salaire. Le salaire réel pour le ménage s'élève si cette hausse est plus importante que celle de la TVA. Tel est le cas lorsque « l'assiette » de la TVA est plus large que celle des cotisations. Si l'élasticité de l'offre de travail n'est pas nulle, et sous l'hypothèse d'un effet de substitution dominant, l'offre de travail va s'élever, et avec elle l'emploi. Cette hausse sera sans doute contenue du fait de la faible élasticité de l'offre de travail au salaire.

12. Dans la variante française, $C^* d\tau_v = -wL^* d\tau_c$. On obtient dL^* à partir de (5.36),

$$C^* + G = F(K^*, L^*) - \delta K^* \Leftrightarrow \frac{C^* + G}{L^*} = f(k^*) - \delta k^*,$$

En différentiant, et en utilisant le fait que k^* est indépendant de (τ_c, τ_v), on obtient (avec $dG = 0$) :

$$\frac{dC^*}{C^*} = \frac{L^*}{C^*}\left(f\left(k^*\right) - \delta k^*\right)\frac{dL^*}{L^*},$$

À l'optimum du ménage, on a :

$$\frac{u'(C^*)}{v'(L^*)} = \frac{1+\tau_v}{w^*} \tag{5.41}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sigma(C^*)}\frac{dC^*}{C^*} = \frac{w^*}{1+\tau_v} d\left(\frac{1+\tau_v}{w^*}\right) + \frac{1}{\psi(L^*)}\frac{dL^*}{L^*},$$

On en déduit :

$$\left(\frac{1}{\psi(L^*)}+\frac{1}{\sigma(C^*)}\frac{Y^*-\delta K^*}{C^*}\right)\frac{dL^*}{L^*}=\left(\frac{(1+\tau_c)\,wL^*}{(1+\tau_v)\,C^*}-1\right)\frac{d\tau_c}{1+\tau_c}.$$

Le terme entre parenthèses dans le membre de gauche est positif. L'effet sur l'emploi d'une baisse des cotisations sociales financé par la TVA est positif si et seulement si $(1+\tau_c)\,wL^* < (1+\tau_v)\,C^*$. Il est affaibli si $\psi(L^*)\to 0$ (offre de travail inélastique), si $\sigma(C^*)\to 0$ (demande de biens inélastique), ou si $(Y^*-\delta K^*)/C^*$ est grand (l'assiette de la TVA est petite dans le revenu net total).

13. On part de l'équation précédente. On prend dans le TEE (on demandait seulement des ordres de grandeur pour les calculs – pas de calculatrice autorisée) : $Y^*-\delta K^* = 1\,554,9$ (PIB net), $C^* \simeq 993,2/1,2 \simeq 800$, $(1+\tau_c)\,wL^* = 930,7$, $(1+\tau_v)\,C^* = 993,2$.

    les documents 11 et 13 nous renseignent sur les élasticités prix de l'offre de travail. On posera $\psi(L^*)\simeq 0,2$. Nous n'avons pas d'information sur $\sigma(C^*)$. Nous avons noté dans le chapitre 4 le faible consensus autour de la valeur que ce paramètre pourrait prendre. On prendra toutefois $\sigma(C^*)\simeq 1$ dans l'application numérique.

    L'équation obtenue en 13 devient :

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1554,9}{800}\right)\frac{dL^*}{L^*}=\left(\frac{930,7}{993,2}-1\right)\frac{3}{2}(-0,01)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dL^*}{L^*}\simeq\frac{-0.1\times 1.5}{0,2+0,5}(-0,01)=\frac{0,15}{0,7}\times 0,01\simeq 0,2\times 0,01.$$

    L'emploi augmenterait donc de l'ordre de 0,2 %. Avec le document 14, en prenant L^* comme l'effectif salarié (qui comprend la fonction publique), on obtient une hausse de l'emploi de 50 000 individus.

    La prise en compte de l'emploi public n'est bien sûr pas satisfaisante (elle implique une surestimation du volume de l'emploi supplémentaire créé). Cependant, la principale critique de modélisation que l'on doit faire est l'absence de chômage.

14. La contrainte de l'État devient

$$\frac{dB_t}{dt}=r_tB_t+G_t+T_t-\tau_vC_t-\tau_cw_tL_t.$$

    L'équilibre est défini comme précédemment, mais $A_t=K_t+B_t$. À l'équilibre de long terme, la règle d'or modifiée prévaut. Si la dette reste fixée à B, on a (pour $r_t=\theta$) :

$$\theta B+G+T-\tau_vC-\tau_cw^*L^*=0.$$

    Avec un ajustement ex ante :

$$\theta dB+dG+dT-w^*L^*d\tau_c=Cd\tau_v \tag{5.42}$$

Dans la variante allemande, une partie des recettes de TVA supplémentaires a été utilisée pour réduire le déficit primaire. On a toujours $dG = dT = 0$. Cette fois, on augmente la TVA d'un montant $d\tau_v$ mais le supplément de recettes finance une baisse des cotisations moindre (en Allemagne, de l'ordre de 1/3 des recettes de TVA ont été consacrées à la baisse des cotisations). Disons que $\alpha C^* d\tau_v = -w^* L^* d\tau_c$ où $\alpha \in [0,1]$. Alors, pour $d\tau_c < 0$,

$$d\left(\frac{w^*}{1+\tau_v}\right) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\alpha}\frac{(1+\tau_c)\, w^* L^*}{(1+\tau_v)\, C^*} > 0.$$

Il devient donc moins vraisemblable que l'on observe une relance.

8.3. Les effets redistributifs de la TVA sociale

La TVA sociale a très souvent été perçue comme socialement injuste dans le grand public. Ce jugement s'appuie en général sur le mode de financement de la baisse des cotisations sociales. La TVA est perçue comme anti-redistributive parce qu'elle implique une hausse des prix à la consommation qui pénalise relativement plus les ménages dont les revenus sont les plus faibles. Selon le rapport Besson, il est « certain que, compte tenu de la propension plus importante des ménages modestes à consommer leur revenu plutôt que d'épargner, toute hausse de prix se répercutera davantage sur eux ». La part des dépenses de consommation dans le revenu des ménages des neuf premiers déciles de la distribution des revenus est en effet de l'ordre de 85 % alors qu'elle est inférieure à 75 % pour le dernier décile.

Cet argument laisse cependant dans l'ombre la baisse des cotisations sociales que la hausse de TVA vient financer. Or, si les ménages aisés épargnent effectivement plus que les autres, il s'ensuit que leurs revenus sont aussi constitués pour une plus grande part de revenus du capital. Dans la mesure où les cotisations sont assises sur les revenus du travail, ce sont donc les ménages aisés qui sont le moins susceptibles de bénéficier, au moins directement, de la baisse des cotisations sociales.

La baisse des cotisations viendrait ainsi plutôt invalider le jugement que l'on porte à la TVA sociale. Ce problème tente de mieux cerner les effets redistributifs de la TVA sociale. On utilisera pour cela une variante du modèle de croissance optimale de Ramsey dans laquelle coexistent deux classes d'agents, les capitalistes et les travailleurs. Les capitalistes sont les seuls agents à réaliser un effort d'épargne ; ils sont par conséquent les seuls à percevoir des revenus du capital. Les travailleurs, de leur côté, consomment l'intégralité de leur revenu lors de chaque période.

Dans tout ce qui suit, on supposera pour simplifier qu'il y a un seul capitaliste et un seul travailleur.

1. La fiscalité. La consommation est taxée au taux de TVA τ_c ; elle est supposée acquittée par les ménages. Les cotisations sont proportionnelles à la masse salariale ; elles sont payées par les entreprises. Soit τ_v le taux de cotisations sociales. On choisit le bien de consommation comme numéraire : le prix hors taxe de ce bien est égal à 1. À combien s'élève la dépense réelle de consommation (taxe comprise) d'un ménage consommant C biens ? À combien s'élève le coût du

travail pour l'entreprise si elle utilise L unités de travail, pour un salaire réel unitaire (net de cotisations) w ?

2. Le ménage capitaliste. Ses préférences sont décrites par la fonction d'utilité

$$\int_0^\infty u_k(C_t^k)\exp(-\theta t)dt.$$

Il consomme C_t^k biens en t et ne travaille pas. Il ne tire son revenu que de l'épargne. On note A_0 sa richesse initiale, r_t le taux d'intérêt réel en t. À chaque date, il répartit son revenu entre consommation et épargne.

a) Écrivez le problème d'un capitaliste.

b) Écrivez le Hamiltonien associé à ce problème. Quelles en sont les variables d'état et de contrôle ?

c) Donnez les conditions nécessaires du premier ordre de ce problème. Déduisez-en l'équation d'Euler donnant l'évolution de la consommation du capitaliste au cours du temps.

3. Le travailleur. Ses préférences sont représentées par la fonction d'utilité

$$\int_0^\infty (u_w(C_t^w) - v(L_t))\exp(-\theta t)dt,$$

où C_t^w est la consommation d'un travailleur en t, et L_t son offre de travail. Il reçoit un transfert social T en t. Sa richesse initiale est supposée nulle.

a) Écrivez le problème que doit résoudre un travailleur.

b) Quelles sont les conditions nécessaires du premier ordre associées à ce problème ?

4. L'entreprise. Il y a deux facteurs de production, le capital et le travail. La technologie est représentée par la fonction $F(K_t, L_t)$, supposée concave et à rendements d'échelle constants. L'entreprise est supposée se comporter de façon concurrentielle. Elle produit $F(K_t, L_t)$ biens en t à l'aide de K_t unités de capital et de L_t unités de travail. On néglige la dépréciation du capital.

a) Écrivez le profit de l'entreprise.

b) Quelles sont les conditions du premier ordre associées au problème de maximisation du profit ?

5. L'État. L'État prélève la TVA et les cotisations sociales. Il assure le versement des transferts sociaux, sa dépense publique en t est G, et il peut s'endetter au taux d'intérêt du marché. Vous noterez B_t la dette publique (réelle) en t. Écrivez la contrainte de budget de l'État.

6. L'équilibre. Écrivez les égalités emplois-ressources sur le marché du travail, des actifs, et des biens.

7. L'équilibre de long terme. Situez la valeur k^* du rapport capital/travail dans le long terme par rapport à celui qui prévaudrait à la règle d'or k_{or} et à celui qui prévaudrait à la règle d'or modifiée k_{or}^*. Comment la fiscalité, résumée ici à (τ_c, τ_v),

influence-t-elle le rapport k^* ? Comment influence-t-elle le coût unitaire du travail pour l'entreprise ? Comment influence-t-elle le salaire réel w^* perçu par le travailleur ?

8. La réaction de l'économie à une modification de la fiscalité. Supposons que l'économie se trouve initialement à l'équilibre de long terme correspondant à $\tau_c = \tau_v = 0$. Considérons une réforme fiscale $(d\tau_c, d\tau_v)$ quelconque. Montrez que la réaction de l'économie à long terme peut être décrite par le système

$$dC^k + dC^w = \left(f(k^*) - \delta k^*\right) dL,$$

$$d\tau_v + d\tau_c + \frac{1}{\sigma_v^*}\frac{dL}{L^*} = -\frac{1}{\sigma_u^*}\frac{dC^w}{C^w},$$

et

$$dC^w + C^w d\tau_c = -w^* L^* d\tau_v + w^* dL,$$

où σ_u^* et σ_v^* sont deux paramètres que vous interpréterez.

9. La TVA sociale. Une politique de TVA sociale consiste à réduire le taux de cotisations et à augmenter le taux de TVA de sorte que le montant réel des transferts sociaux reste inchangé. On supposera que $dG = 0$, et que l'État ne modifie pas le volume de sa dette dans le long terme $(dB = 0)$. Si l'ajustement de taux est réalisé ex ante, c'est-à-dire en supposant que les assiettes des deux prélèvements ne réagissent pas, montrez que l'on a :

$$d\tau_v = -\frac{w^* L^*}{C^k + C^w} d\tau_c,$$

où L^*, C^k et C^w sont les valeurs à l'équilibre de long terme (initial) de l'emploi, de la consommation du capitaliste et de celle du travailleur, respectivement.

10. Les effets redistributifs de la TVA sociale dans le long terme. On retient souvent que l'offre de travail est très peu sensible au salaire perçu par le travailleur. Comment réagissent dans ce cas le bien-être du capitaliste et celui du travailleur ? Que pensez-vous alors de l'assertion du rapport Besson ? Interprétez.

11. La dynamique de l'économie. Les résultats de la question précédente sont valables dans le long terme. Il reste possible qu'à court terme, les gains et/ou les pertes de bien-être qu'implique la politique soient répartis différemment. Pour en avoir un premier aperçu, nous allons nous restreindre aux politiques dites « à budget équilibré » : $B_t = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. On continue de supposer que l'offre de travail est très peu sensible au salaire. Donnez dans ce cas le système dynamique qui régit l'évolution du stock de capital agrégé K_t et celle de la consommation C_t^k du capitaliste au cours du temps.

12. Le diagramme des phases. Sans calculs. On reprend les hypothèses formulées dans la question 11. Construisez le diagramme de phases correspondant à la situation initiale hypothétique, $\tau_c = \tau_v = 0$. Supposons qu'une politique de TVA sociale soit mise en œuvre. Comment ce diagramme est-il affecté ?

13. Les effets redistributifs à court et moyen terme 1. Sans calculs. Supposons que l'économie se trouve à son équilibre de long terme au moment où la TVA sociale est mise en œuvre. Supposons que cette mesure constitue une surprise pour l'économie. Comment réagissent le bien-être du capitaliste et celui du travailleur au chapitre de la transition qui amène l'économie à son nouvel équilibre de long terme ? Rapprochez ce résultat de celui de la question 10.
14. Les effets redistributifs à court et moyen terme 2. Sans calculs. Même question que la précédente, si l'économie ne se trouve pas à son équilibre de long terme au moment où la TVA sociale est mise en œuvre.

Éléments de correction

1. $(1+\tau_c)C$ et $(1+\tau_v)wL$ respectivement.
2. a) Le capitaliste choisit $(C_t^k, A_t)_{t\geqslant 0}$ associée à A_0 donnée qui maximise
$$\int_0^\infty u_k(C_t^k)\exp(-\theta t)dt$$
sous la contrainte de budget
$$(1+\tau_c)C_t^k + \dot{A}_t = r_t A_t \tag{5.43}$$
b) Le Hamiltonien s'écrit
$$\mathscr{H}_t^k = u_k(C_t^k)\exp(-\theta t) + \lambda_t^k\left(r_t A_t - (1+\tau_c)C_t^k\right).$$
Ici, A_t est une variable d'état et C_t^k une variable de contrôle.
c) Les conditions du premier ordre s'écrivent
$$u_k'(C_t^k)\exp(-\theta t) - (1+\tau_c)\lambda_t^k = 0, \tag{5.44}$$
$$\lambda_t^k r_t = -\dot{\lambda}_t^k. \tag{5.45}$$
Et la contrainte de Ponzi,
$$\lim_{t\to\infty}\lambda_t^k A_t \geqslant 0.$$
L'équation d'Euler recherchée est $\dot{C}_t^k = (r_t-\theta)\sigma^k(C_t^k)C_t^k$.
3. a) Le travailleur choisit $(C_t^w, L_t)_{t\geqslant 0}$ qui maximise
$$\int_0^\infty (u_w(C_t^w) - v(L_t))\exp(-\theta t)dt$$
sous la contrainte
$$(1+\tau_c)C_t^w = w_t L_t + T \tag{5.46}$$
pour tout $t\geqslant 0$.
b) Les conditions du premier ordre sont
$$u_w'(C_t^w)\exp(-\theta t) = \lambda_t^w(1+\tau_c) \tag{5.47}$$
$$-v'(L_t)\exp(-\theta t) = -\lambda_t^w w_t. \tag{5.48}$$

4. a) Le profit est $F(K_t, L_t) - (1+\tau_v) w_t L_t - (r_t + \delta) K_t$.
   b) Les conditions du premier ordre sont

$$F_K(K_t, L_t) = r_t + \delta \tag{5.49}$$

$$F(K_t, L_t) - (1+\tau_v) w_t L_t - (r_t + \delta) K_t = 0 \tag{5.50}$$

5. L'État dépense G, effectue le transfert social T, et perçoit les recettes de TVA $\tau_c \left(C_t^k + C_t^w\right)$ et les cotisations sociales $\tau_v w_t L_t$. Il peut aussi s'endetter. Sa contrainte de budget s'écrit donc :

$$\dot{B}_t = r_t B_t + G + T - \tau_c \left(C_t^k + C_t^w\right) - \tau_v w_t L_t. \tag{5.51}$$

6. Un équilibre de l'économie est une situation dans laquelle les équations (5.43) à (5.51) sont satisfaites, et

$$A_t = K_t + B_t, \tag{5.52}$$

$$F(K_t, L_t) - \delta K_t = C_t^k + C_t^w + \dot{K}_t + G. \tag{5.53}$$

   L'offre a été supposée égale à la demande de travail ci-dessus.
   Par la loi de Walras, (5.53) est redondante : en utilisant (5.52), la somme de (5.43), (5.46) et (5.51) donne

$$r_t K_t + (1+\tau_v) w_t L_t = C_t^k + C_t^w + \dot{K}_t + G.$$

   La condition du premier ordre de l'entreprise (5.50) conduit à (5.53).
   Ainsi, un équilibre est défini par les équations (5.43) à (5.52).

7. L'équation d'Euler de la consommation du capitaliste donne $r^* = \theta$. L'équilibre coïncide avec celui de la règle d'or modifiée. On a : $k^* = k^*_{\text{or}} < k_{\text{or}}$ (pour $\theta > 0$). Puisque k^*_{or} est indépendant de (τ_c, τ_v), le coût du travail $(1+\tau_c) w^*$ l'est aussi (suit de (5.50)). Quand $d\tau_c < 0$, on a donc $dw^* > 0$ (indépendamment du taux de TVA) : le salaire perçu par le travailleur augmente.

8. On différentie l'équation d'équilibre sur le marché des biens et les conditions du premier ordre du travailleur,

$$C^k + C^w + G = F(K^*, L^*) - \delta K^*,$$

$$\frac{v'(L^*)}{u'_w(C^w)} = \frac{w^*}{1+\tau_c},$$

$$(1+\tau_c) C^w = w^* L^* + T.$$

   Sous les hypothèses de la question,

$$dC^k + dC^w = \left(f(k^*) - \delta k^*\right) dL$$

$$d\tau + dt + \frac{1}{\sigma_v^*} \frac{dL}{L^*} = -\frac{1}{\sigma_u^*} \frac{dC^w}{C^w}$$

$$dC^w + C^w d\tau_c = L^* dw^* + w^* dL$$

   où $1/\sigma_v = Lv''(L)/v'(L) > 0$ et $1/\sigma_u = -C^w u''_w(C^w)/u'_w(C^w) > 0$.
   On sait que $d(1+\tau_v) w^* = 0 \Rightarrow dw^* = -w^* d\tau_v$, ce qui conduit au résultat.

9. La relation entre $d\tau_c$ et $d\tau_v$ suit de (5.51). Dans le long terme, $\dot{B}_t = 0$, et

$$0 = rB + G + T - \tau_c\left(C^k + C^w\right) - \tau_v wL.$$

Pour $dT = dG = 0$, et pour un ajustement ex ante,

$$rdB - \left(C^k + C^w\right)d\tau_c - wLd\tau_v = 0.$$

Dans la variante française, $dB = 0$. Donc :

$$d\tau_c = -\frac{w^*L^*}{C^k + C^w}d\tau_v.$$

10. On a alors $\sigma_v^* \to 0$ (l'offre de travail est inélastique). Le système précédent donne (pour $d\tau_v < 0$)

$$dC^k = w^*L^*\frac{C^k}{C^k + C^w}d\tau_v < 0$$

$$\frac{dL}{L} \to 0$$

$$dC^w = -w^*L^*\frac{C^k}{C^k + C^w}d\tau_v = -dC^k > 0$$

Il n'y a pas d'effet sur l'emploi puisque l'on a pris un modèle qui suppose l'équilibre sur le marché du travail. Mais la TVA sociale a des effets distributifs très nets. L'intuition suggère que les capitalistes souffrent de la TVA sur leur consommation sans bénéficier de la hausse des salaires qui suit l'allégement de charges ; les travailleurs souffrent aussi de la hausse de la TVA, mais bénéficient de la hausse des salaires, et comme l'allègement est financé en partie par les capitalistes, les travailleurs finissent par bénéficier de la mesure. Au final, l'utilité de long terme des capitalistes baisse autant que celle des travailleurs augmente.

11. On se ramène à un système en (K_t, C_t^k).

$$\begin{aligned}\dot{K}_t &= F(K_t, L_t) - \delta K_t - G - C_t^k - C_t^w \\ &= F(K_t, L_t) - \delta K_t - G - C_t^k - C_t^w - \tau_c C_t^w + \tau_c C_t^w \\ &= r_t K_t - (1+\tau_c)C_t^k - \left(G + T - \tau_c C_t^w - \tau_c C_t^w - \tau_v w_t L_t\right).\end{aligned}$$

Si l'on se restreint aux politiques fiscales équilibrées, le dernier terme est nul, et l'on a donc :

$$\dot{K}_t = r_t K_t - (1+\tau_c)C_t^k,$$

Dans le cas polaire de la section précédente (offre de travail inélastique, normalisée à 1), on a :

$$\dot{K}_t = f'(K_t)K_t - (1+t)C_t^k, \tag{5.54}$$

L'équation d'Euler de la consommation des capitalistes a été obtenue à la question 2 :

$$\dot{C}_t^k = \left(f'(K_t) - \theta\right)\sigma^k(C_t^k)C_t^k. \tag{5.55}$$

12. Cf. figure 15.

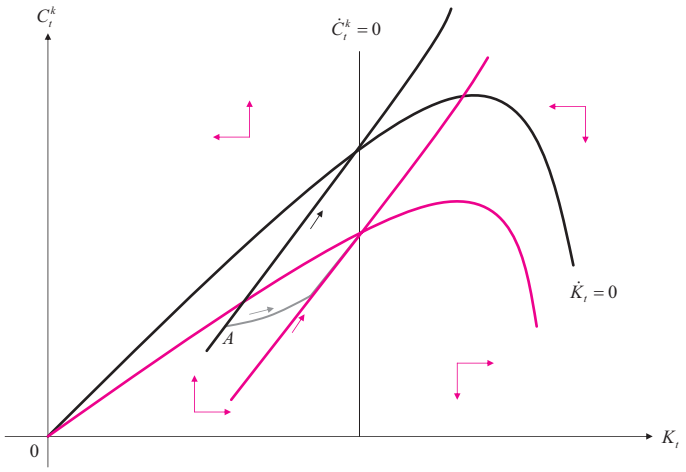


FIGURE 15
Réaction à une mesure de TVA sociale

13. On constate que les capitalistes perdront systématiquement, même sur la transition, si la situation initiale est l'équilibre stationnaire correspondant à t (que la politique soit annoncée ou pas).
14. C'est encore le cas si la situation initiale n'est pas l'équilibre stationnaire ; un exemple est décrit sur la figure 15 (pour une politique annoncée), lorsque la situation initiale est le point A.

8.4. L'exploitation des ressources épuisables

Le rapport « Gaz et électricité : un défi pour l'Europe et pour la France » présenté par J.M. Chevalier et J. Percebois au Conseil d'Analyse Économique en février 2008 constate que le « secteur européen de l'énergie, qui était traditionnellement organisé sur des bases nationales et souvent publiques, est entré depuis les années quatre-vingt-dix dans un vaste mouvement de libéralisation conforme à la philosophie économique du Traité de Rome fondée sur la libre circulation des hommes, des capitaux, des marchandises et des services. Pour l'électricité et le gaz naturel, les directives de 1996 (électricité), de 1998 (gaz naturel) et de 2003 (électricité et gaz naturel) ont introduit des bouleversements structurels importants, notamment pour le cas français marqué par une longue tradition de monopoles publics. [...] Au départ, le processus de libéralisation était fondé sur l'idée que les seuls mécanismes de marché étaient en mesure de régler les problèmes de court, moyen et long termes. Aujourd'hui, la libéralisation et la transformation des marchés du gaz et de l'électricité exigent empirisme et pragmatisme ». Ce pragmatisme s'est traduit par l'adoption en mars 2007 d'un « paquet énergie » qui prescrit notamment la diminution à l'horizon 2020 de 20 % des émissions de gaz à effet de serre par rapport aux niveaux de 1990.

Ce problème s'interroge sur le caractère bénéfique de cette phase de « libéralisation pragmatique » et de la politique publique mise en œuvre dans le cadre du « paquet énergie ».

On considère pour cela une variante du modèle de croissance optimale de Ramsey dans laquelle il y a trois agents (un ménage représentatif, une entreprise représentative et l'État) et trois biens (un bien produit qui sert à la fois de bien de consommation et de capital, un autre facteur de production, disons le gaz, et le travail). Le second facteur de production n'est pas reproductible (il s'agit d'une ressource épuisable, ou « non renouvelable »).

Les préférences du ménage sont représentées par la fonction d'utilité instantanée $u(c_t)$ où c_t est la consommation à l'instant t, $u' > 0$ et $u'' < 0$. En $t = 0$, son utilité est

$$\int_0^\infty u(c_t)\exp(-\theta t)dt.$$

Sa dotation en travail est $\bar{\ell} > 0$. Il reçoit un transfert T_t de l'État à l'instant t. En outre, il possède initialement $k_0 > 0$ unités de capital et $S_0 > 0$ unités de ressource épuisable. À l'instant t, le revenu unitaire du capital pour le ménage est r_t^m. La quantité totale restante de ressource épuisable est S_t, le ménage en prélève une quantité x_t et la cède à l'entreprise au prix unitaire q_t^m (mesuré en biens de consommation). On notera w_t^m le salaire réel unitaire reçu par le ménage.

L'entreprise produit $F(k_t, x_t, \ell_t)$ biens à l'instant t. Les rendements d'échelle sont constants. La fonction F est croissante avec chacun de ses arguments, et elle est concave. Le coût d'usage du capital est r_t (on négligera la dépréciation). Le coût unitaire de la ressource épuisable est q_t et celui du travail est w_t. L'entreprise est supposée maximiser son profit intertemporel.

L'État transfère T_t au ménage en t. Il finance ce transfert par des taxes, τ_t^k, τ_t^x et τ_t^ℓ, supposées acquittées par le ménage : $r_t^m = r_t - \tau_t^k$, $q_t^m = q_t - \tau_t^x$ et $w_t^m = w_t - \tau_t^\ell$.

1. Écrivez la loi d'évolution du stock S_t de ressource épuisable. Dans tout ce qui suit, on se placera dans le cas où $S_t > 0$.
2. Écrivez le problème du ménage en $t = 0$ et le Hamiltonien correspondant. Quelles sont les deux variables de contrôle de ce problème ? Donnez les deux conditions du premier ordre relatives à ces deux variables. Quelles sont les deux variables d'état de ce problème ? Quelles sont les deux conditions du premier ordre relatives à ces deux variables ? Vous noterez μ_t (resp., γ_t) le supplément d'utilité qu'éprouverait le ménage s'il disposait d'une unité de capital (resp., ressource épuisable) en t.
3. Montrez que l'évolution de la consommation est gouvernée par une équation d'Euler que vous donnerez.
4. Montrez que
$$\frac{\dot{q}_t^m}{q_t^m} = r_t^m$$
pour tout t. Cette relation est connue comme la « règle de Hotelling ». Interprétez-la.

5. Écrivez le problème de l'entreprise et les conditions du premier ordre associées. Vous noterez F'_k, F'_x, et F'_ℓ les dérivées partielles de F par rapport à k, x, et ℓ.
6. Définissez un équilibre décentralisé de l'économie.
7. Écrivez le problème du planificateur central et les conditions du premier ordre associées. Comme dans la question 2, vous noterez μ_t (resp., γ_t) le supplément d'utilité qu'éprouverait le ménage s'il disposait d'une unité de capital (resp., ressource épuisable) en t.
8. Existe-t-il une politique $(\tau^k_t, \tau^x_t, \tau^\ell_t, T_t)$ pour laquelle l'équilibre est un optimum ? Commentez, en insistant notamment sur l'optimalité de la politique d'exploitation de la ressource épuisable à l'équilibre : l'exploitation de cette ressource est-elle aujourd'hui trop intense ?
9. En présence d'une ressource épuisable, on craint souvent que les générations futures soient lésées du fait des moindres ressources qui leur seront laissées. Dans ce cadre, il semble naturel de se concentrer sur un optimum satisfaisant un critère de justice sociale additionnel : toutes les générations doivent avoir le même bien-être ($u(c_t)$ est indépendant de t). Montrez que tel sera le cas si

$$\dot{k}_t = F'_x x_t.$$

   Cette relation est connue comme la « règle de Hartwick ». Montrez qu'elle est équivalente à $\mu_t \dot{k}_t + \gamma_t \dot{S}_t = 0$. Interprétez alors cette règle.
10. Il semble établi que le réchauffement climatique est en grande partie imputable à l'expoitation des ressources épuisables. Soit $\varphi(S_t)$ la température en t, avec $\varphi' < 0$. L'utilité du ménage est influencée par le réchauffement climatique : elle s'écrit maintenant $u(c_t, \varphi(S_t))$, où $\varphi(S_t)$ est traitée comme une externalité (le ménage ne prend pas en compte le fait que l'exploitation des ressources épuisables conduit à une hausse de la température), et $u'_\varphi < 0$. Comment s'écrit désormais la règle de Hotelling pour le ménage ? Comment s'écrit-elle pour le planificateur central (qui, lui, prend en compte la hausse de la température due à l'exploitation des ressources épuisables) ? Qu'en concluez-vous sur l'optimalité de l'exploitation de la ressource épuisable ?
11. Montrez qu'il existe une politique $(\tau^k_t, \tau^x_t, \tau^\ell_t, T_t)$ dans laquelle $\tau^k_t = \tau^\ell_t = 0$ permettant de faire coïncider l'équilibre et l'optimum. Montrez que l'évolution de τ^x_t est gouvernée par l'équation différentielle

$$\frac{\dot{\tau}^x_t}{\tau^x_t} = F'_k - \frac{b_t}{\tau^x_t}$$

   où b_t s'exprime en fonction de u'_c, u'_φ et φ'. Que représente b_t ?
12. Supposons que l'on choisisse de ne pas intervenir initialement ($\tau^x_0 = 0$). Montrez que $\tau^x_t \leqslant 0$ quel que soit t. Comment interprétez-vous la baisse initiale de la taxe pesant sur l'extraction de la ressource épuisable ? Concluez sur le caractère approprié de la politique mise en œuvre dans l'Union européenne.

13. Montrez que la solution optimale satisfait le critère de justice introduit à la question 9, ici $u(c_t, \varphi(S_t))$ indépendant de t, si l'on suit la règle de Hartwick.

Pour en savoir plus :

Hartwick, J., 1977, Intergenerational equity and the investing of rents from exhaustible ressources, *American Economic Review* 62, 972-974.

Stollery K., 1998, Constant utility paths and irreversible global warming, *Canadian Journal of Economics* 31, 730-742.

Éléments de correction

1. La dynamique s'écrit $\dot{S}_t = -x_t$.
2. Le ménage choisit une suite $(c_t, k_t, x_t, t \geqslant 0)$, associée à k_0 donné, qui maximise

$$\int_0^\infty u(c_t)\exp(-\theta t)\,dt$$

sous les contraintes

$$\dot{k}_t = r_t^m k_t + q_t^m x_t + w_t^m \bar{\ell} - c_t + T_t$$

$$\dot{S}_t = -x_t$$

et $S_0 > 0$ donné.
Le Hamiltonien s'écrit

$$\mathscr{H}_t^m = u(c_t)\exp(-\theta t) + \mu_t\left(r_t^m k_t + q_t^m x_t + w_t^m \bar{\ell} - c_t + T_t\right) - \gamma_t x_t$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$u'(c_t)\exp(-\theta t) = \mu_t$$

$$\mu_t q_t^m = \gamma_t$$

$$\mu_t r_t^m = -\dot{\mu}_t$$

$$\dot{\gamma}_t = 0$$

3. On différentie $u'(c_t)\exp(-\theta t) = \mu_t$ par rapport à t :

$$\begin{aligned} u''(c_t)\dot{c}_t\exp(-\theta t) - \theta u'(c_t)\exp(-\theta t) &= \dot{\mu}_t \\ &= -\mu_t r_t^m \\ &= -u'(c_t)\exp(-\theta t) r_t^m \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \left(r_t^m - \theta\right)\sigma(c_t)$$

où $\sigma(c_t) = -u'(c_t)/c_t u''(c_t) > 0$.

4. Montrez que
$$\frac{\dot{q}_t^m}{q_t^m} = r_t^m$$
pour tout t. Cette relation est connue comme la « règle de Hotelling ». Interprétez cette règle.
On différentie $\mu_t q_t^m = \gamma_t$ par rapport à t :
$$\mu_t \dot{q}_t^m + \dot{\mu}_t q_t^m = \dot{\gamma}_t = 0$$
$$\Leftrightarrow \mu_t \dot{q}_t^m + \mu_t r_t^m q_t^m = 0.$$
Pour $\mu_t > 0$, on obtient la règle de Hotelling. Elle peut s'interpréter comme une condition d'arbitrage pour le ménage. S'il renonce en t à consommer un bien de consommation et achète une unité de capital, le rendement net de cette opération est r_t. S'il achète $1/q_t$ unités de ressource épuisable, les revend en $t+dt$, le rendement net de cette opération est
$$\frac{q_{t+dt}}{q_t} - 1 \to \frac{\dot{q}_t^m}{q_t^m}$$
pour dt petit.

5. L'entreprise maximise $F(k_t, x_t, \ell_t) - r_t k_t - q_t x_t - w_t \ell_t$. Les conditions du premier ordre s'écrivent :
$$F'_k = r_t$$
$$F'_x = q_t$$
$$F'_\ell = w_t$$

6. Un équilibre est une situation dans laquelle le ménage est rationnel (les conditions du premier ordre du problème de la question 3 sont satisfaites), l'entreprise est rationnelle (les conditions du premier ordre du problème de la question 5 sont satisfaites), la contrainte de budget de l'État est saturée,
$$T_t = \tau_t^k k_t + \tau_t^x x_t + \tau_\ell^x \ell_t,$$
et l'offre est égale à la demande sur chaque marché à chaque instant. En t, sont ouverts un marché pour le bien de consommation, et trois marchés pour les facteurs. Par la loi de Walras, on peut se concentrer sur trois d'entre eux, disons les marchés des facteurs. Le marché du capital et celui de la ressource ont été implicitement supposés équilibrés dans ce qui précède. Sur le marché du travail, $\ell_t = \bar{\ell}$.

7. Le planificateur choisit une suite $(c_t, k_t, x_t, t \geqslant 0)$, associée à k_0 donné, qui maximise
$$\int_0^\infty u(c_t) \exp(-\theta t) dt$$

sous les contraintes

$$\dot{k}_t = F(k_t, x_t, \ell_t) - c_t$$

$$\dot{S}_t = -x_t$$

et $S_0 > 0$ donné.

Le Hamiltonien s'écrit

$$\mathscr{H}_t^m = u(c_t)\exp(-\theta t) + \mu_t\left(F(k_t, x_t, \bar{\ell}) - c_t\right) - \gamma_t x_t$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$u'(c_t)\exp(-\theta t) = \mu_t$$

$$\mu_t F'_x = \gamma_t$$

$$\mu_t F'_k = -\dot{\mu}_t$$

$$\dot{\gamma}_t = 0$$

8. L'équilibre décentralisé est un optimum : $\tau_t^k = \tau_t^x = \tau_\ell^x = T_t = 0$. Le marché fournit donc les signaux de prix appropriés pour que l'exploitation de la ressource épuisable se fasse à un rythme qui maximise le bien-être social.

9. L'utilité $u(c_t)$ est constante si et seulement si $\dot{c}_t = 0$.

   Mais

   $$c_t = F(k_t, x_t, \bar{\ell}) - \dot{k}_t \Rightarrow \dot{c}_t = F'_k\dot{k}_t + F'_x\dot{x}_t - \frac{d\dot{k}_t}{dt}.$$

   La règle de Hartwick donne

   $$\frac{d\dot{k}_t}{dt} = F'_x\dot{x}_t + \dot{F}'_x x_t$$

   de sorte que

   $$\dot{c}_t = F'_k\dot{k}_t - \dot{F}'_x x_t = F'_k F'_x x_t - \dot{F}'_x x_t.$$

   Puisque l'équilibre décentralisé est un optimum, la règle de Hotelling s'écrit

   $$\frac{\dot{q}_x}{q_x} = \frac{\dot{F}'_x}{F'_x} = r_t = F'_k$$

   ce qui implique que $\dot{c}_t = 0$.

   On sait que $\mu_t F'_x = \gamma_t$ et $\dot{S}_t = -x_t$: la règle de Hartwick s'écrit donc comme demandé dans l'énoncé.

   Cette règle nous dit qu'en utilisant le revenu de la ressource épuisable pour augmenter le stock de capital (et non pas pour consommer), il est possible de maintenir la consommation constante à l'optimum ; alternativement, avec la seconde écriture, la valeur sociale de l'investissement est nulle.

10. L'utilité du ménage devient

$$\int_0^\infty u(c_t, \varphi(S_t)) \exp(-\theta t) dt$$

mais comme le ménage considère $\varphi(S_t)$ comme indépendant du prélèvement qu'il opère dans le stock de ressource épuisable, la règle de Hotelling s'écrit comme à la question 4 :

$$\frac{\dot{q}_t^m}{q_t^m} = r_t^m.$$

Le Hamiltonien du planificateur devient :

$$\mathscr{H}_t^m = u(c_t, \varphi(S_t)) \exp(-\theta t) + \mu_t \left(r_t^m k_t + q_t^m x_t + w_t^m \bar{\ell} - c_t + T_t \right) - \gamma_t x_t$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$u'_c \exp(-\theta t) = \mu_t$$

$$\mu_t F'_x = \gamma_t$$

$$\mu_t F'_k = -\dot{\mu}_t$$

$$u'_\varphi \varphi' \exp(-\theta t) = -\dot{\gamma}_t$$

Le même calcul que celui de la question 4 donne :

$$\mu_t \dot{F}'_x + \dot{\mu}_t F'_x = \dot{\gamma}_t = -u'_\varphi \varphi' \exp(-\theta t)$$

$$\Leftrightarrow u'_c \exp(-\theta t) \dot{F}'_x - u'_c \exp(-\theta t) F'_k F'_x = -u'_\varphi \varphi' \exp(-\theta t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{F}'_x}{F'_x} = F'_k - \frac{u'_\varphi \varphi'}{u'_c F'_x} < F'_k.$$

La croissance du prix de la ressource épuisable est donc trop forte à l'équilibre, ce qui suggère que l'exploitation de cette ressource est trop intense.

11. Le comportement du ménage est décrit à la question 2 ; celui du planificateur à la question 10. Dans les deux cas, pour la politique donnée dans l'énoncé,

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \left(F'_k - \theta \right) \sigma(c_t)$$

$$\dot{k}_t = F(k_t, x_t, \bar{\ell}) - c_t$$

Les deux comportements diffèrent sur la règle de Hotelling. Pour le ménage, elle s'écrit :

$$\frac{\dot{F}'_x - \dot{\tau}_t^x}{F'_x - \tau_t^x} = F'_k.$$

Pour le planificateur,

$$\frac{\dot{F}'_x}{F'_x} = F'_k - \frac{u'_\varphi \varphi'}{u'_c F'_x}.$$

Ces deux évolutions coïncident si et seulement si

$$\frac{\dot{F}'_x}{F'_x} = \frac{\dot{F}'_x - \dot{\tau}^x_t}{F'_x - \tau^x_t} - \frac{u'_\varphi \varphi'}{u'_c F'_x}.$$

En remplaçant $\dot{F}'_x / F'_x$ par son expression à l'optimum (règle de Hotelling), on obtient :

$$\frac{\dot{\tau}^x_t}{\tau^x_t} = F'_k - \frac{1}{\tau^x_t} \frac{u'_\varphi \varphi'}{u'_c}.$$

Cette équation a (au moins) une solution, ce qui montre le premier point demandé. On a $b_t = u'_\varphi \varphi' / u'_c > 0$: c'est le nombre de biens de consommation supplémentaires qu'il faut donner au ménage pour le compenser d'une hausse de 1 unité de température. C'est une mesure du dommage subi du fait du réchauffement climatique.

12. La résolution de l'équation différentielle obtenue à la question 11 donne (cf. chapitre 4) :

$$\tau^x_t \exp(-R_t) = -\int_0^t b_s \exp(-R_s) ds < 0,$$

avec $R_t = \int_0^t r_s ds$. Si l'on ne veut pas intervenir initialement, il faudra subventionner la ressource épuisable dans le futur pour réduire l'extraction courante (et le réchauffement courant) puisque le réchauffement futur est moins coûteux pour le bien-être. Si toute la ressource est finalement extraite, la politique européenne va dans le même sens, en retardant l'extraction.

13. On procède comme à la question 9. Ici, le critère de justice est $\dot{u}_t = 0$, soit :

$$\dot{u}_t = u'_c \dot{c}_t + u'_\varphi \varphi' \dot{S}_t = 0.$$

Comme à la question 9,

$$\dot{c}_t = F'_k F'_x x_t - \dot{F}'_x x_t.$$

En utilisant la règle de Hotelling (à l'optimum),

$$\dot{c}_t = x_t \frac{u'_\varphi}{u'_c} \varphi',$$

ce qui implique que $\dot{u}_t = 0$.

9. REPÈRES BIBLIOGRAPHIQUES

Blanchard et Fischer (1989), Sections 2.1 et 2.2. Une version en temps discret du modèle à horizon infini (décrivant de façon détaillée ses propriétés dynamiques) est présentée dans Azariadis (1993), sections 7.3 et 13.4. Pour la résolution du problème d'optimisation, Barro et Sala-i-Martin (2003), annexe 3.

CHAPITRE 6

Dépense, déficit et dette publique

1. INTRODUCTION

Le modèle IS-LM prédit qu'une hausse des dépenses publiques, quel que soit le mode de financement que l'État utilise, conduit à une hausse de la production et de l'emploi à court terme, c'est-à-dire pour des prix (des biens et des facteurs de production) donnés et pour un stock de capital également donné. Nous avons déjà entrevu dans le chapitre 4 que cette prédiction n'est pas vraiment confirmée lorsque les agents prennent en compte l'intégralité de la politique au moment où ils choisissent leur consommation et leur épargne, par exemple l'intégralité de la suite des impôts dont ils devront s'acquitter au cours du temps, et non pas seulement l'impôt courant. À moyen terme, les prix (et les anticipations de prix) réagissent aux déséquilibres éventuellement observés sur les marchés (mais le stock de capital reste fixé en principe) et le modèle AS-AD (offre globale / demande globale) suggère que la politique budgétaire perd de son efficacité, la relance sur la production et l'emploi étant progressivement amoindrie par la hausse du niveau général des prix et des salaires[1]. La production et l'emploi retrouveraient finalement leurs niveaux naturels.

Dans ce chapitre, nous allons revenir sur l'efficacité de la politique budgétaire à plus long terme. Les variations du déficit public ont-elles comme à moyen terme peu d'effet, voire des effets pervers, comme nous invitent à le penser les deux derniers exemples du chapitre précédent, sur l'activité à plus long terme, dès lors que la politique budgétaire est susceptible d'influencer l'accumulation du capital dans l'économie ?

1. Les repères bibliographiques donnent deux références auxquelles vous pouvez vous reporter.

Il est utile de reprendre auparavant plus en détail les principaux canaux au travers desquels la politique budgétaire et son financement influencent l'activité à court et moyen terme. À court terme, dans le modèle IS-LM, l'activité est gouvernée par la demande agrégée de biens : les entreprises satisfont la demande qui s'adresse à elles, emploient la quantité de main-d'œuvre nécessaire pour satisfaire cette demande, et distribuent les revenus des facteurs de production en contrepartie. Il se trouve qu'alors la demande de travail est inférieure à l'offre de travail (il y a du chômage).

La demande agrégée de biens qui s'adresse aux entreprises résulte de l'interaction du marché des biens et du marché de la monnaie. Sur le marché des biens, une hausse des dépenses publiques se traduit par une hausse de la demande de biens. Les entreprises, pour satisfaire cette demande, vont devoir embaucher et la masse salariale va augmenter. La hausse des revenus distribués incite les ménages à consommer plus, ce qui amplifie l'effet de relance initial et enclenche un processus « multiplicateur », au chapitre duquel la hausse de la demande conduit à une hausse des revenus, et donc à une nouvelle hausse de la demande : la hausse de la demande agrégée est finalement supérieure à la hausse de la demande supplémentaire de biens par l'État. Ce processus se stabilise pour un niveau de revenu et d'emploi plus élevés[1].

Mais cette hausse du revenu, incitant les ménages à consommer plus, implique une hausse de la demande de monnaie. Pour une offre de monnaie donnée, il apparaît donc un excès de demande de monnaie : les ménages vendent des titres qu'ils détiennent, le prix des titres baisse, le taux d'intérêt augmente, ce qui réduit les dépenses d'investissement des entreprises, et ainsi la demande agrégée. Un nouvel effet multiplicateur est amorcé, conduisant cette fois à une baisse de la production et de l'emploi. Il s'agit de « l'effet d'éviction », la hausse de la demande publique étant contrebalancée par une baisse de la demande privée.

En général, la production et l'emploi se retrouvent toutefois à un niveau plus élevé qu'initialement : l'effet d'éviction n'annule pas à court terme la relance initiale. À moyen terme, le prix des biens et les salaires devraient réagir à la hausse de l'emploi et de la production.

La courbe de demande globale, AD, lie la production d'équilibre de court terme au niveau général des prix : lorsque les prix s'élèvent, les agents du secteur privé demandent plus de monnaie pour réaliser leurs transactions sur le marché des biens, et l'excès de demande de monnaie qui s'ensuit, nous venons de le voir en décrivant l'effet d'éviction, s'accompagne d'une baisse de la production.

La courbe d'offre globale, AS, est habituellement déduite de la courbe de Phillips augmentée de Friedman. Milton Friedman, dans son discours à l'American Economic Association de 1968, part du constat que les contrats de travail sont fixés pour un certain temps, et suppose que les salaires (nominaux) fixés sont d'autant plus forts que le chômage est faible (et donc, que la production est élevée) et que les travailleurs

1. Cette propriété de stabilité (d'amortissement) du processus multiplicateur est une conséquence immédiate de la « loi psychologique fondamentale » selon laquelle une hausse du revenu conduit à une hausse de la consommation, mais dans une moindre proportion.

anticipent un niveau général des prix élevé. Une fois les salaires fixés, les entreprises choisissent le prix des biens qu'elles produisent. Le prix effectif dépend bien sûr du coût de production (ici du coût salarial) : lorsque la production est élevée, le chômage est bas, les salaires sont élevés et le niveau général des prix est élevé. C'est la relation d'offre globale, AS.

On comprend alors intuitivement ce qui devrait se passer à moyen terme. La hausse de la production, qui fait suite à la politique de relance s'accompagne d'une baisse du chômage, ce qui renforce le pouvoir de négociation des travailleurs, et se traduit par des salaires et des prix plus élevés qu'initialement : la demande agrégée baisse. En outre, la hausse des prix, si elle est répercutée dans les anticipations de prix, devrait conduire à une nouvelle hausse des salaires (et des prix) : la demande agrégée baisse une nouvelle fois. Au total, l'effet de relance initial est très nettement amoindri à moyen terme. La baisse de la production devrait en fait se poursuivre tant que les anticipations de prix sont inférieures au prix effectif, c'est-à-dire tant que la production n'est pas à son « niveau naturel ».

Jusque-là, nous n'avons pas pris en compte la contrepartie de l'investissement en termes de capital supplémentaire ; or, l'investissement, comme composante de la demande agrégée, varie. Le chapitre précédent suggère qu'à long terme, les effets de la politique budgétaire sont faibles, et qu'éventuellement, une fois pris en compte le mode de financement utilisé, ils peuvent se révéler négatifs, dans le sens où ils conduisent à la fois à une réduction de la consommation par tête des ménages et une baisse du stock de capital par tête : l'éviction de la consommation privée serait plus que proportionnelle à long terme !

Deux mises en garde devraient être faites. D'abord, la dépense publique se réduit à une simple consommation de biens par l'État, et néglige les aspects productifs de cette dépense (la construction d'une voie de circulation est loin de se résumer économiquement aux revenus qui sont alors versés). Ensuite, les instruments employés pour financer la dépense publique dans le chapitre 4, l'impôt, négligent un outil important à la disposition de l'État : la dette publique.

Quels sont les effets de la dépense publique et de son financement sur les comportements individuels et sur l'accumulation du capital à long terme ? Ces effets dépendent-ils de la position initiale de l'économie par rapport à la règle d'or ou la règle d'or modifiée ? Quels sont les effets de la dette publique ? Existe-t-il des limites à la dépense publique si l'État peut la financer par la dette ? Tels sont certains des thèmes que nous aborderons dans ce chapitre.

2. DÉFICITS, ÉPARGNE ET INTÉRÊT

À court terme, une hausse du déficit primaire, qu'il résulte d'une dépense publique plus élevée ou d'une baisse d'impôt, conduit à une hausse de la demande agrégée et à une hausse de la demande de monnaie ; l'excès de demande de monnaie se résorbant du fait de la hausse du taux d'intérêt. À plus long terme, les modifications du taux d'intérêt incitent les agents à réviser le montant de leur épargne ; de même que le

schéma de financement de la dépense au cours du temps. La politique budgétaire aura donc en général des répercussions sur l'accumulation du capital. Cette première section s'intéresse à la relation entre la politique budgétaire et l'épargne.

2.1. Déficit primaire et épargne agrégée

Comment le déficit primaire influence-t-il l'épargne ? Pour avoir quelques éléments de réponse, reprenons le modèle à générations imbriquées de Diamond (1965) présenté dans le chapitre 3 ; certaines prédictions offertes par modèle à horizon infini ont été vues dans le chapitre 5 (dans le cas simple où la dépense publique est financée par un impôt forfaitaire, l'éviction est complète).

Soient G_t la quantité de biens consommée par l'État à la date t, T_{1t} et T_{2t} les impôts prélevés lors de la période t sur les individus de la génération t et sur ceux de la génération $t-1$, respectivement. Par définition, le « déficit primaire » à la date t est égal à la différence $G_t - (T_{1t} + T_{2t})$: il correspond à la différence entre la dépense publique et les recettes d'origine fiscale.

Une politique budgétaire est une suite $(G_t, T_{1t}, T_{2t}, t \geqslant 0)$. On dit qu'elle est « équilibrée » si, pour tout t, le déficit primaire est nul :

$$G_t = T_{1t} + T_{2t},$$

ou bien encore, par tête d'individu de la génération t,

$$g_t = t_{1t} + \frac{t_{2t}}{1+n},$$

où n est le taux de croissance démographique (avec $t_{2t} = T_{2t}/N_{t-1}$ l'impôt payé par chaque vieux en t).

Les deux contraintes de budget auxquelles un agent h de la génération t fait face s'écrivent ainsi :

$$c_{1t}^h + s_t^h = e_1^h - t_{1t} \tag{6.1}$$

et

$$c_{2t+1}^h = (1 + r_{t+1}) s_t^h + e_2^h - t_{2t+1}. \tag{6.2}$$

Pour l'instant, nous allons nous concentrer sur les effets de la politique budgétaire sur l'épargne. Pour cette raison, il n'y a pas de production : chaque agent reçoit simplement au début de chaque période une dotation en biens de consommation qu'il peut transférer au cours du temps. Si l'on renonce à consommer un bien en t, on obtient en contrepartie $(1 + r_{t+1})$ biens en $t+1$, avec $r_{t+1} \geqslant 1$.

Contrairement à la version du modèle à générations décrite dans le chapitre 3, les agents d'une même génération sont désormais différents ; ils diffèrent ici les uns des autres selon leur dotation (e_1^h, e_2^h). Ils peuvent emprunter ou prêter une certaine quantité de biens s_t^h (il s'agit d'un prêt – d'une épargne – si $s_t^h > 0$ et d'un emprunt sinon) à la date t et rembourser leur dette lors de la période suivante.

Cette forme d'hétérogénéité a une conséquence importante pour le marché de l'épargne (ou du crédit) : des opérations de crédit peuvent se nouer entre les agents

d'une même génération ; typiquement, un agent h relativement bien doté lorsqu'il est jeune aura plutôt tendance à prêter à un agent h' relativement bien doté lorsqu'il est vieux. Les opérations de crédit se feront nécessairement entre des agents d'une même génération, et concerneront uniquement les agents (jeunes) de la génération t à la date t : un vieux refusera de prêter quoique ce soit et ne peut évidemment rien emprunter, ni aux jeunes ni aux autres vieux, qui refusent tous de lui prêter.

En l'absence de restrictions sur s_t^h, l'agent h choisit un plan de consommation (c_{1t}^h, c_{2t+1}^h) qui maximise

$$u(c_{1t}^h) + \beta u(c_{2t+1}^h)$$

sous sa contrainte de budget intertemporelle

$$c_{1t}^h + \frac{c_{2t+1}^h}{1+r_{t+1}} = e_1^h - t_{1t} + \frac{e_2^h - t_{2t+1}}{1+r_{t+1}}. \tag{6.3}$$

L'épargne qui en résulte est donnée par les contraintes de budget (6.1) ou (6.2).

Il est simple de savoir si un agent sera prêteur ou emprunteur. Le prix relatif du bien 2 (en termes de bien 1) est égal à $1/(1+r_{t+1})$ dans (6.3). Lorsque l'agent h consomme (c_{1t}^h, c_{2t+1}^h), il acceptera de céder une unité de bien 2 s'il obtient en échange au moins $\beta u'(c_{2t+1}^h)/u'(c_{1t}^h)$ unités de bien 1. Pour décrire le comportement d'épargne, plaçons-nous au point $(e_1^h - t_{1t}, e_2^h - t_{2t+1})$ où l'épargne est nulle. Si le taux marginal de substitution $\beta u'(c_{2t+1}^h)/u'(c_{1t}^h)$ y est supérieur à $1/1+r_{t+1}$ (l'agent h est alors relativement bien doté lorsqu'il est jeune), l'agent h souhaite consommer plus que sa dotation en bien 2 : il est prêteur ($s_t^h > 0$). Sinon, il est emprunteur.

Comme on l'a vu dans le chapitre 3, si $u'' < 0$, les deux biens sont normaux. Il s'ensuit qu'une hausse de l'impôt durant la première période ($dt_{1t} > 0$), en conduisant à une baisse du revenu intertemporel, conduit à une baisse de la consommation lors de chaque période. La contrainte budgétaire de seconde période implique alors que $ds_t^h < 0$: les agents prêteurs souhaitent réduire leur épargne, et les emprunteurs augmenter leur dette. Au total, l'épargne agrégée doit baisser pour tout taux d'intérêt réel.

De la même façon, une hausse de l'impôt durant la seconde période ($dt_{2t+1} > 0$) conduit à une baisse de la consommation lors de chaque période. La contrainte budgétaire de première période, cette fois, montre que l'épargne agrégée doit augmenter.

Ces deux résultats témoignent du désir des agents de lisser leur consommation au cours du temps : *un agent épargne moins lorsqu'il est taxé lors de la période courante, et épargne plus lorsqu'il anticipe qu'il sera taxé dans le futur*. Dans le cas particulier où $dt_{1t} = -dt_{2t+1}/(1+r_{t+1})$, son revenu intertemporel n'est pas affecté par la politique budgétaire : une réduction d'impôt aujourd'hui n'aura aucun effet sur le comportement du ménage, puisqu'elle est suivie par une hausse anticipée des impôts demain de même montant (actualisé). On retrouvera ce point dans la section 3.1.

Ces premiers résultats suggèrent que les effets d'une politique budgétaire dépendent de la façon dont elle est financée au cours du temps, et ainsi de l'anticipation des politiques budgétaires futures.

2.2. Déficit primaire et intérêt

À l'équilibre, l'épargne nette doit être nulle : ce que certains jeunes prêtent correspond à ce que d'autres empruntent. Aussi, à l'équilibre, le financement de la dépense publique doit-il influencer le taux d'intérêt : le taux d'intérêt doit s'ajuster pour résorber le déséquilibre sur le marché du crédit qui fait suite aux modifications de la fiscalité. Est-il possible de prédire la réaction du taux d'intérêt à une hausse du déficit primaire ?

Pour le savoir, on procède en deux temps : (1) on examine tout d'abord les effets d'une hausse du taux d'intérêt sur l'épargne individuelle, et (2) on décrit ensuite les effets d'une hausse de l'épargne agrégée (désirée) sur le taux d'intérêt d'équilibre.

Commençons par la relation entre le taux d'intérêt et l'épargne (désirée). Une hausse du taux d'intérêt augmente le revenu intertemporel en réduisant la valeur actuelle des prélèvements futurs. Aussi, désormais, trois effets différents sont à l'œuvre : un effet de revenu et de substitution habituels (c'est-à-dire, pour un revenu intertemporel donné) et un nouvel effet de revenu, puisqu'une hausse du taux d'intérêt, en réduisant la valeur présente de la dotation nette de seconde période, réduit le revenu intertemporel (si $e_2^h - t_{2t+1} > 0$).

Ecrivons la fonction de consommation solution du problème du ménage. Elle dépend des prix et du revenu :

$$c_{1t}^h = c_1\left(\frac{1}{1+r_{t+1}}, e_1^h - t_{1t} + \frac{e_2^h - t_{2t+1}}{1+r_{t+1}}\right).$$

Et donc :

$$\frac{dc_{1t}^h}{d(1/(1+r_{t+1}))} = \left.\frac{dc_{1t}^h}{d(1/(1+r_{t+1}))}\right|_{R_{\text{int}}^h} + \frac{dc_{1t}^h}{dR_{\text{int}}^h}\frac{dR_{\text{int}}^h}{d(1/(1+r_{t+1}))},$$

où R_{int}^h représente le revenu intertemporel de l'agent h. L'équation de Slutsky donne :

$$\left.\frac{dc_{1t}^h}{d(1/(1+r_{t+1}))}\right|_{R_{\text{int}}^h} = \underbrace{\frac{dh_{1t}^h}{d(1/(1+r_{t+1}))}}_{(+)} - c_{2t+1}\frac{dc_{1t}^h}{dR_{\text{int}}^h}.$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{dc_{1t}^h}{dr_{t+1}} = \underbrace{\frac{dh_{1t}^h}{dr_{t+1}}}_{(-)} + \frac{s_t^h}{1+r_{t+1}}\underbrace{\frac{dc_{1t}^h}{dR_{\text{int}}^h}}_{(+)}$$

en utilisant (6.2). Le premier terme représente l'effet de substitution ; il est négatif si les deux biens sont substituts : une hausse du taux d'intérêt réduit le prix relatif du bien demain et incite à consommer plus demain et moins aujourd'hui. Le deuxième est un effet de revenu consolidé : puisque la consommation est normale, elle augmente avec le revenu intertemporel, de sorte que ce deuxième effet est du signe de s_t : lorsque

l'agent est prêteur, une hausse du taux d'intérêt augmente son revenu et l'incite à consommer plus lors de chaque période.

Une hausse du taux d'intérêt, en réduisant le prix relatif du bien 2, conduit systématiquement à une baisse de la consommation de première période si $s_t^h < 0$ (l'agent h est emprunteur). Par contre, si $s_t^h > 0$ (l'agent h est prêteur), l'effet net est ambigu si $s_t^h > 0$.

Il suit de la contrainte budgétaire de première période que :

$$\frac{ds_t^h}{dr_{t+1}} = -\frac{dc_{1t}^h}{dr_{t+1}}.$$

L'épargne individuelle réagissant de façon ambiguë au taux d'intérêt, la réaction de l'épargne agrégée S_t à une modification du taux d'intérêt sera *a fortiori* complexe. Il semble raisonnable d'admettre qu'elle sera négative pour des taux d'intérêt suffisamment petits (proches de -1), et positive pour des taux suffisamment élevés : personne ne veut prêter si le capital n'est pas remboursé et aucun intérêt versé ; la plupart des agents voudront prêter si le rendement de l'épargne est arbitrairement grand.

La figure 1 donne un exemple dans lequel il existe trois taux d'intérêt d'équilibre : r_1, r_2 et r_3. Supposons que le financement de la dépense publique se fasse de sorte que l'épargne augmente pour tout taux d'intérêt ; c'est le cas par exemple lorsque l'on taxe plutôt les vieux de chaque génération (étant donné le taux d'intérêt réel, les agents jeunes épargnent plus pour pallier la baisse de leur revenu en seconde période de vie). Alors le taux d'intérêt d'équilibre réagit lui aussi de façon ambiguë : les trois nouveaux taux d'équilibre sont r_1', r_2' et r_3' et l'on a $r_1' < r_1$ (les effets de substitution sont localement dominants) et $r_2' > r_2$ (là où les effets de revenu sont très forts).

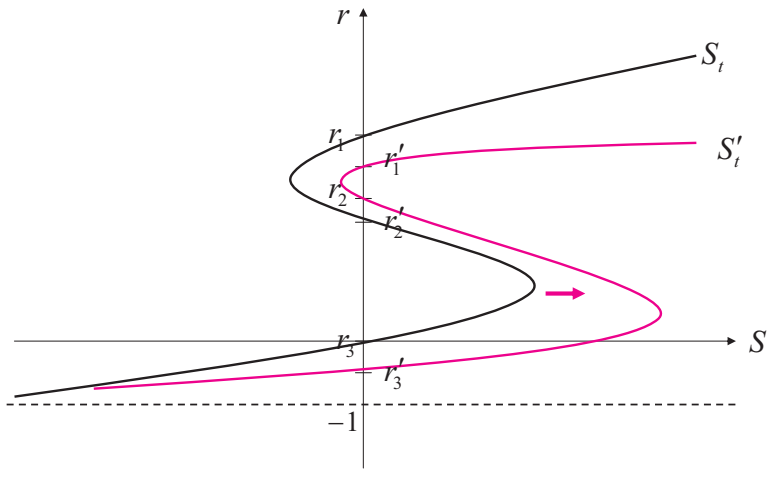


FIGURE 1
Équilibres sur le marché de l'épargne

Si l'équilibre est unique, comme sur la figure 2, alors le taux d'intérêt doit baisser. C'est ce que suggère la première intuition : l'épargne (l'offre de prêt ou de capital) augmente, et une baisse du taux d'intérêt rééquilibre le marché.

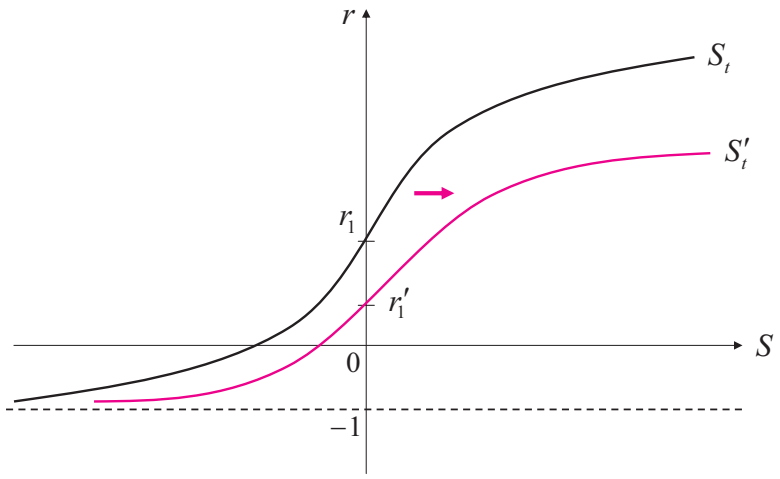


FIGURE 2
Équilibre sur le marché de l'épargne

On constate que si le taux d'intérêt d'équilibre augmente (ou bien, de façon équivalente, l'épargne agrégée baisse pour tout taux d'intérêt) lorsque (1) les dépenses publiques courantes s'élèvent et sont financées (au moins partiellement) par une taxe sur les jeunes, et (2) les dépenses publiques futures baissent, et que cette baisse est répercutée (au moins partiellement) dans une baisse de la taxe sur les vieux.

Ces conclusions s'accordent-elles avec celles du modèle IS-LM ? Il est naturel, pour répondre à cette question, de regarder le cas d'une dépense courante financée par un impôt courant. Dans le modèle IS-LM, le théorème de Haavelmo prédit une hausse de la production égale à celle de la dépense publique, et une hausse du taux d'intérêt. On ne peut pour l'instant que s'intéresser au second point. Nous venons de voir que les agents vont réduire leur épargne pour mieux lisser leur consommation au cours du temps. Le taux d'intérêt devrait augmenter, et la demande agrégée de bien peut s'élever également, si la baisse atténuée de la consommation privée est plus faible que la dépense publique (l'éviction est limitée). On retrouve les prédictions du modèle IS-LM.

Si, par contre, la politique est financée par un impôt futur (en fait, sur les vieux), ils s'y opposent systématiquement : l'épargne augmente, et le taux d'intérêt diminue.

Dans le cas particulier où $dt_{1t} = -dt_{2t+1}/(1 + r_{t+1})$, l'épargne individuelle ne change pas, l'épargne agrégée ne change donc pas non plus, et ainsi le taux d'intérêt d'équilibre reste le même qu'initialement : la politique budgétaire n'a aucun effet sur le taux d'intérêt.

3. DETTE, IMPÔT ET DÉFICITS

La Comptabilité Nationale ne distingue pas clairement la notion de déficit primaire. Le compte des administrations publiques (APU) est donné en annexe 7 pour l'année 2006 (Compte 3.311 « Dépenses et recettes des Administrations Publiques (S13) » accessible en ligne depuis le site de l'INSEE). La dépense totale de ce secteur institutionnel s'élevait à environ 960 Md€. Elle était financée principalement par les impôts (les recettes fiscales sont ventilées par type d'impôt dans l'annexe 8 pour la même année) et les cotisations sociales perçues, pour 820 Md€. Viennent en complément d'autres types de recettes, à hauteur de 90 Md€, dont 60 sont issus des activités de production des administrations publiques (musées, etc.). Le compte des administrations publiques est donc déficitaire pour 50 Md€ ; c'est le *déficit public* pour 2006. Ce déficit est financé par la dette. Fin 2006, la dette publique totale accumulée était de 1 150 Md€. En contrepartie, les intérêts qui sont payés sur cette dette sont comptabilisés dans les dépenses : ils sont pratiquement du même montant que le déficit lui-même.

La situation s'est dégradée en 2008 : pour financer un volume de dépenses de 1 027 Md€, les APU disposaient de 960 Md€ de recettes (dont 350 Md€ de cotisations sociales et 514 Md€ d'impôts), ce qui donne un déficit public de 67 Md€ (les intérêts payés sur la dette s'élevant à 54 Md€). Ces 67 Md€ ont été financés par l'endettement. En 2008, l'endettement total des APU était de 1 200 Md€ (soit 61 % du PIB) ; la dette au sens de Maastricht, qui sert de référence dans l'U.E., est plus élevée (1 320 Md€, soit 67,4 % du PIB en 2008).

Dans cette section, nous allons prendre en compte la dette comme deuxième source de financement ; nous supposerons que les dépenses publiques, au sens qu'on leur a donné dans la section précédente, augmentées des intérêts payés sur la dette, sont financées lors d'une période donnée par l'impôt ou par l'émission d'une nouvelle dette. Notons B_t la dette à la fin de la période t. Supposons que la dette est intégralement remboursée d'une période sur l'autre, éventuellement au moyen d'une nouvelle dette : en t, l'État doit payer $(1+r_t)B_{t-1}$, une somme que l'on appelle le « service de la dette ». On a donc :

$$B_t = (G_t - T_t) + (1+r_t)B_{t-1},$$

où T_t est l'impôt total collecté en t. On reconnaît le déficit primaire, $G_t - T_t$, et le déficit public, $(G_t - T_t) + r_t B_{t-1}$. Ce déficit est ici égal à la variation de la dette[1].

3.1. L'équivalence ricardienne

Le recours à la dette permet en t de réduire l'impôt en t. Mais, si l'impôt est utilisé pour rembourser la dette lors de la période suivante, cela implique une hausse de l'impôt en $t+1$. Comme l'adage bien connu de Benjamin Franklin l'énonçait, « rien en

1. En réalité, la variation de la dette entre 2005 et 2006 a été plus faible que le déficit public de 2006. L'annexe 9 montre qu'une part importante de la différence est dûe au fait que la dette n'est pas intégralement remboursée d'une période sur l'autre. Cf. également chapitre 7 pour une extension.

ce monde ne peut être tenu pour certain, la mort et l'impôt exceptés », un déficit primaire courant doit être suivi par une consolidation fiscale, d'autant plus importante que le taux d'intérêt réel est élevé (et, plus généralement, que la dette est remboursée tardivement). Le chapitre 4 suggérait que le financement par la dette est susceptible de conduire finalement à une forme particulière de neutralité, les avantages courants d'une baisse de l'impôt étant exactement compensés par l'anticipation des désagréments futurs liés au remboursement de la dette : la réduction d'impôt permise par la dette lors de la période courante incite les ménages à épargner plus en prévision des impôts futurs qu'ils devront payer, ce qui tend à contrecarrer l'effet de relance associé à la hausse du déficit. Cette neutralité est appelée « équivalence ricardienne ».

Pour en rendre compte, écrivons la nouvelle contrainte budgétaire de l'État :

$$G_t + (1 + r_t)B_{t-1} = T_{1t} + T_{2t} + B_t. \tag{6.4}$$

Pour financer son déficit, l'État émet une nouvelle dette, $B_t - B_{t-1}$, ce qui porte le volume de la dette à B_t à la fin de la période t (à la date $t+1$). Ou bien encore, par tête d'agent jeune en t :

$$g_t + (1 + r_t)\frac{b_{t-1}}{1+n} = t_{1t} + \frac{t_{2t}}{1+n} + b_t,$$

avec $g_t = G_t/N_t$, $b_t = B_t/N_t$, $t_{1t} = T_{1t}/N_t$ et $t_{2t} = T_{2t}/N_{t-1}$.

Cette contrainte montre que tout déficit courant doit être suivi par un surplus, si la dette doit être remboursée. Supposons par exemple que $b_t = 0$ pour tout t, sauf en T et en $T+1$; l'État finance ses achats par l'impôt durant ces périodes. En T, l'État décide de réduire l'impôt pesant sur chaque jeune d'un montant $dt_{1T} = -b < 0$, et de rembourser la dette b émise en prélevant un impôt supplémentaire sur chaque vieux en $T+1$, pour un montant $dt_{2T+1} = (1 + r_{t+1})b > 0$.

Une approche de court terme prédirait une hausse du taux d'intérêt en T suivie par une baisse en $T+1$. Pour savoir ce qu'il en est effectivement lorsque les agents forment des anticipations sur les prélèvements qu'ils subiront dans le futur, notons que la politique touche uniquement les agents de la génération T : ils supportent un impôt moindre en T, mais doivent acquitter un impôt plus lourd en $T+1$. Nous pouvons donc nous concentrer sur la réaction de cette génération à la politique publique. Les contraintes budgétaires de ces ménages s'écrivent :

$$c^h_{1T} + s^h_T = e^h_1 - (t_{1T} - b),$$

et

$$c^h_{2T+1} = (1 + r_{T+1})s^h_T + e^h_2 - (t_{2T+1} + (1 + r_{T+1})b).$$

Ici, t_{1T} et t_{2T+1} représentent les impôts payés initialement, et $t_{1T} - b$ et $t_{2T+1} + (1 + r_{T+1})b$ ceux qui sont payés finalement.

La normalité de la demande de biens de consommation suggère que la baisse de l'impôt en T incite les ménages à consommer plus en T, mais que la hausse de l'impôt en $T+1$ les incite à consommer moins en T. Il se trouve que ces deux effets doivent se

compenser exactement. Pour le voir, remarquons simplement que la contrainte budgétaire intertemporelle s'écrit

$$c_{1T}^h + \frac{c_{2T+1}^h}{1+r_{T+1}} = e_1^h - t_{1T} + \frac{e_2^h - t_{2T+1}}{1+r_{T+1}}.$$

Elle est indépendante de la dette émise. Il s'ensuit que la consommation d'un agent h de la génération T n'est pas affectée par le montant de la dette b.

Comment réagit l'épargne ? Comme le montre la contrainte budgétaire de première période, on doit avoir[1]

$$ds_T^h = b > 0.$$

L'épargne augmente donc de la dette publique. Les ménages épargnent eux-mêmes cette dette, et la reversent à l'État lors de la période suivante augmentée des intérêts perçus ! À l'équilibre, sur le marché du crédit, la dette publique constitue une offre agrégée de titres. Par conséquent, on doit avoir

$$\sum_h s_T^h + N_T b = N_T b \Leftrightarrow \sum_h s_T^h = 0,$$

ce qui montre que le taux d'intérêt d'équilibre ne change pas (s_T^h est l'épargne dans la situation de référence).

Ce qu'indique ce résultat, ce n'est bien sûr pas que la politique budgétaire est neutre, mais que la chronologie exacte de la répartition impôts versus dette importe peu ; seule importe la valeur actuelle de l'impôt total. Ce résultat reste vrai plus généralement quand toute émission de dette se traduit par une baisse de l'impôt bénéficiants aux agents qui supporteront, au travers d'un impôt plus élevé, le remboursement de la dette. Il est ainsi vrai, en particulier, dans le modèle à horizon infini, et sous certaines conditions, dans des modèles à générations dans lesquels chaque génération se soucie du bien-être des suivantes (cf. section 3.2).

Par contre, on s'attend à ce que l'équivalence ricardienne ne s'applique pas si l'identité des bénéficiaires de la baisse de l'impôt ne coïncide pas avec celle de ceux qui vont devoir rembourser la dette. Dans ce cas, le financement des déficits est assuré par des générations différentes, ce qui peut sans doute se justifier pour des raisons d'équité inter-générationnelle, par exemple pour financer de lourds déficits subis en temps de guerre ou après une importante catastrophe naturelle.

Pour se convaincre des effets réels du recours à la dette dans le cas où la politique budgétaire modifie, au travers de son mode de financement, la distribution des revenus (intertemporels), supposons que, à la date T, on réduise l'impôt payé par les jeunes (les agents de la génération T) et que l'on augmente en $T+1$ l'impôt payé cette fois par les jeunes (les agents de la génération $T+1$). Soit : $dt_{1T} = -b$ et $dt_{1T+1} = (1+r_{t+1})b/(1+n)$. Le service de la dette est assuré par un plus grand nombre de ménages.

1. Rappelons que, dans cette contrainte, t_{1T} représente l'impôt prélevé dans la situation initiale. Il est donc donné.

Les contraintes budgétaires d'un agent de la génération T s'écrivent :

$$c_{1T}^h + s_T^h = e_1^h - (t_{1T} - b),$$

et

$$c_{2T+1}^h = (1 + r_{T+1}) s_T^h + e_2^h - t_{2T+1}.$$

Et la contrainte budgétaire intertemporelle correspondante est :

$$c_{1T}^h + \frac{c_{2T+1}^h}{1 + r_{T+1}} = e_1^h - (t_{1T} - b) + \frac{e_2^h - t_{2T+1}}{1 + r_{T+1}},$$

Le revenu intertemporel des agents de la génération T augmente de b ; ils consomment plus lors de chaque période, et la contrainte budgétaire de seconde période montre qu'ils doivent épargner plus. À la date T, les vieux ne sont pas directement concernés par la politique : l'épargne agrégée doit donc augmenter, et le taux d'intérêt réel va baisser[1].

Pour les agents de la génération suivante, ces contraintes deviennent :

$$c_{1T+1}^h + s_{T+1}^h = e_1^h - (t_{1T} + (1 + r_{t+1}) b/(1 + n)),$$

$$c_{2T+1}^h = (1 + r_{T+1}) s_T^h + e_2^h - t_{2T+1},$$

et

$$c_{1T}^h + \frac{c_{2T+1}^h}{1 + r_{T+1}} = e_1^h - \left(t_{1T} + (1 + r_{t+1}) \frac{b}{1 + n} \right) + \frac{e_2^h - t_{2T+1}}{1 + r_{T+1}}.$$

Leur revenu intertemporel baisse ; ils consomment moins et épargnent moins, ce qui conduit à une hausse du taux d'intérêt réel. Le financement de la dépense publique, parce qu'il induit une redistribution de la richesse entre les différentes générations, affecte l'équilibre. Ici, le taux d'intérêt augmente, puis diminue (par rapport à la situation où la dette émise est nulle)

Faut-il penser que les baisses d'impôt sont, en pratique, complètement neutralisées par une hausse de l'épargne en prévision de l'impôt futur qui sera prélevé ? Une comparaison brute entre la série du taux d'épargne, mesuré par la différence entre le PIB et la consommation totale rapportée au PIB lui-même, et celle du rapport entre le déficit public (net des intérêts dus par les administrations publiques) et le PIB en France depuis 30 ans, va plutôt dans le sens d'une infirmation de la prédiction théorique d'équivalence ricardienne : à l'exception de la fin des années 1970 et de la période récente (depuis 2003), les hausses du déficit primaire sont en général associées à des baisses du taux d'épargne. Sur toute la période, une hausse de 1 point du rapport déficit/PIB est associée à une *baisse* de 0,6 point du taux d'épargne. En pratique, toutefois,

1. L'équilibre intertemporel est modifié lors de chaque période : par exemple, les vieux de la génération $T-1$, qui sont présents en T, doivent anticiper la baisse du taux d'intérêt et (si l'effet de substitution est dominant) épargner moins.

les conditions nécessaires pour confronter la prédiction théorique aux faits sont difficiles à réunir : la taxe a une forme très particulière ; en outre, il est rare que l'État substitut un mode de financement à un autre à dépense donnée. Il semble que les taux d'intérêt réels répondent peu à des modification du déficit (ce qui conforte l'hypothèse d'équivalence ricardienne), mais qu'en même temps l'épargne aussi reste relativement inerte quand le déficit change (ce qui infirme cette fois l'hypothèse). Un état des lieux des tests de l'hypothèse d'équivalence ricardienne est dressé par Bernheim(1987)[1].

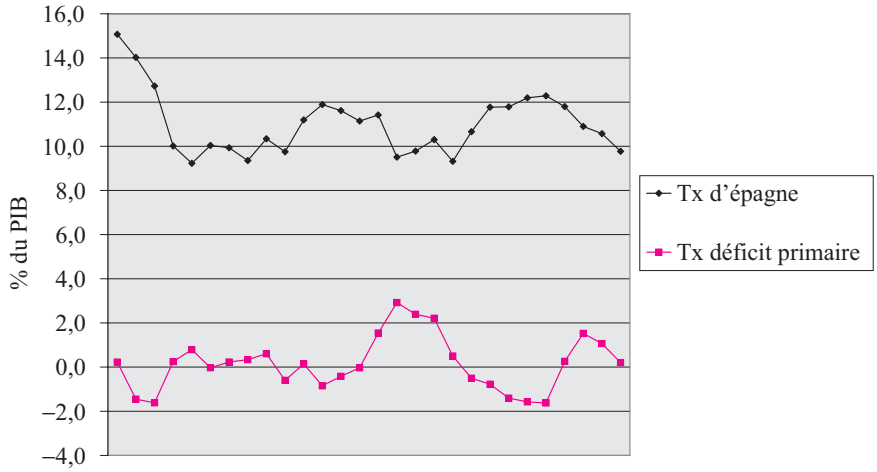


FIGURE 3
Épargne et déficit primaire (1978 : 2006)

3.2. Altruisme intergénérationnel

Le modèle à horizon infini peut sembler assez irréaliste. De même, il est sans doute caricatural de supposer une interaction aussi limitée entre les différentes générations que celle prise en compte dans le modèle à générations imbriquées. Nous allons voir qu'en introduisant une forme d'altruisme, le modèle à générations se rapproche du modèle à horizon infini. On comprend intuitivement que cette analogie est susceptible d'étendre le champ d'application de l'équivalence ricardienne : une baisse d'impôt courante peut être neutralisée au travers d'un *legs* plus important aux générations futures, qui devront rembourser le supplément de dette qui s'est accumulé.

Supposons que les ménages vivent encore deux périodes consécutives, mais modifions très légèrement la chronologie des évènements à l'intérieur de ces deux périodes. Un ménage sera d'abord enfant puis parent. Les enfants ne prennent aucune décision économique. Lorsqu'ils deviennent parents, disons à la date t, au moment où leurs parents meurent, ils reçoivent de leurs parents un héritage prenant la forme

1. On pourra aussi consulter Koray et McMillin (1987).

d'une dotation en capital physique issue d'un placement fait en $t-1$ par leurs parents, et égal à $(1+r_t)k_t$. Ce revenu du capital est complété par le salaire w_t. Ils choisissent alors la consommation totale c_t de leur famille (qui comprend leur propre consommation et celle de leurs $(1+n)$ enfants) et l'héritage $(1+n)k_{t+1}$ qu'ils vont léguer à leurs enfants.

Leur contrainte budgétaire s'écrit donc :

$$c_t + (1+n)k_{t+1} = (1+r_t)k_t + w_t \tag{6.5}$$

Si leur objectif ne dépend pas du bien-être de leurs enfants devenus adultes, ils choisiront bien sûr $k_{t+1} = 0$. Une forme d'altruisme peut se matérialiser de la façon suivante : les parents à la date t valorisent la consommation c_{t+1} de leurs enfants et prennent en compte la définition de cette consommation

$$c_{t+1} + (1+n)k_{t+2} = (1+r_{t+1})k_{t+1} + w_{t+1}, \tag{6.6}$$

anticipant r_{t+1}, w_{t+1}, et prenant k_{t+2} comme donné (cette variable sera choisie par leurs enfants, et ils sont supposés ici ne pas prendre en compte le fait que leur comportement en matière d'héritage influence en partie l'héritage choisi par leurs enfants, et ainsi le bien-être de leurs enfants).

Soient

$$u(c_t) + \beta u(c_{t+1})$$

la fonction d'utilité d'un adulte en t. Le problème de cet adulte est de choisir k_{t+1} qui maximise son bien-être sous les deux contraintes (6.5) et (6.6), étant donnés (k_t, k_{t+2}) et étant donnés les prix $(r_t, r_{t+1}, w_t, w_{t+1})$. La condition du premier ordre s'écrit :

$$(1+n)u'(c_t) = \beta(1+r_{t+1})u'(c_{t+1}),$$

où c_t et c_{t+1} sont définies par (6.5) et (6.6).

À l'équilibre, les prix des facteurs sont définis par les conditions du premier ordre de l'entreprise : $r_t = f'(k_t) = r(k_t)$ et $w_t = f(k_t) - r(k_t)k_t = w(k_t)$. Un équilibre est donc une suite $(c_t, k_t, t \geqslant 0)$ associée à la condition initiale k_0 et satisfaisant

$$(1+n)u'(c_t) = \beta(1+r(k_{t+1}))u'(c_{t+1}),$$

$$c_t = k_t + f(k_t) - (1+n)k_{t+1}$$

pour tout $t \geqslant 0$. On reconnaît dans la première égalité la condition d'Euler du modèle à horizon infini (cf. chapitres 4 et 5). La seconde inégalité est simplement l'équation d'accumulation du capital par tête du modèle à horizon infini. Pour k_0 donné, $k_0 > 0$, la trajectoire d'équilibre (c_t, k_t) convergeant vers la règle d'or modifiée est donc un équilibre du modèle à générations avec altruisme.

Supposons maintenant que l'État émet à chaque date une dette totale B_t et prélève un impôt (sur les adultes) égal à T_t satisfaisant

$$B_t + T_t = B_{t-1} + r_t B_{t-1}.$$

Il y a N_{t-1} adultes payant chacun un impôt. Soit t_t cet impôt par tête en t : $t_t = T_t/N_{t-1}$. La dette totale à la date t est B_{t-1} ; elle est détenue par les N_{t-1} adultes à cette date t. On notera donc $b_{t-1} = B_{t-1}/N_{t-1}$. Remarquons que chacun de ces adultes détient B_t/N_{t-1} titres de dettes à la fin de la période t (soit $(1+n)b_t$ titres de dette publique). Aussi, la contrainte de l'État se réécrit :

$$(1+n)b_t + t_t = (1+r_t)b_{t-1}. \tag{6.7}$$

Les individus transmettent un legs pouvant prendre deux formes, du capital physique et des titres de dette publique. Leur contrainte budgétaire s'obtient en remplaçant le terme k_t de (6.5) par $k_t + b_{t-1}$ (pour tout t), et en prenant en compte l'impôt :

$$c_t + (1+n)(k_{t+1} + b_t) + t_t = (1+r_t)(k_t + b_{t-1}) + w_t.$$

En utilisant (6.7), elle devient :

$$c_t + (1+n)(k_{t+1} + b_t) + (1+r_t)b_{t-1} - (1+n)b_t = (1+r_t)(k_t + b_{t-1}) + w_t$$

$$\Leftrightarrow c_t + (1+n)k_{t+1} = (1+r_t)k_t + w_t.$$

Elle coïncide avec (6.5), ce qui montre que la combinaison particulière choisie par l'État dette/impôt n'influence pas l'équilibre de l'économie.

4. DYNAMIQUE DE LA DETTE PUBLIQUE

4.1. La contrainte budgétaire de l'État

Le traité de Maastricht de 1992 impose une série de contraintes à la politique budgétaire, fixant notamment des bornes supérieures au déficit et à la dette publique : entre autres critères, ce traité stipule que le déficit public ne devrait pas excéder 3 % du PIB, et la dette 60 % du PIB. Ces mesures (notamment la dernière) se justifient habituellement par les risques associés à un endettement excessif, en particulier celui de perdre le contrôle de l'évolution de la dette publique. Dans le projet de loi de finances de 2009, il est prévu que la France ne respecte pas ces deux seuils : le déficit public (au sens de Maastricht) y est reporté comme devant représenter 3,7 % du PIB et la dette 67 % du PIB.

Ces seuils étant exprimés en proportion du PIB, et non pas par tête, réécrivons la contrainte budgétaire de l'État (3) sous la forme :

$$\frac{G_t}{Y_t} + (1+r_t)\frac{Y_{t-1}}{Y_t}\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{T_t}{Y_t} + \frac{B_t}{Y_t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B_t}{Y_t} = \frac{1+r_t}{1+g_t}\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} + \frac{G_t - T_t}{Y_t}, \tag{6.8}$$

où g_t est le taux de croissance du PIB, $Y_t/Y_{t-1} - 1$. Étant donné un taux de déficit primaire, la part de la dette est élevée si (1) le taux d'endettement est élevé, (2) le taux d'intérêt réel est élevé, et (3) le taux de croissance est bas.

Les critères de Maastricht imposent donc que $(G_t + r_t B_{t-1} - T_t)/Y_t \leqslant 0,03$ et $B_t/Y_t \leqslant 0,6$.

La figure 4 décrit l'évolution du rapport de la dette au PIB en France depuis 1978[1]. À l'exception de la fin des années 1990, ce rapport n'a fait qu'augmenter depuis 30 ans, la dette passant de 21 % en 1978 à près de 66 % du PIB en 2006 ; soit, de 73 à 1 150 milliards d'euros. La France a dépassé le seuil fixé par le traité de Maastricht à partir de 2003. Durant les années 80, le taux d'intérêt réel s'est élevé (essentiellement sous l'effet de la baisse de l'inflation) et le taux de croissance du PIB était faible, les deux conjugués donnant une hausse du rapport dette/PIB. Pour la juguler, il aurait fallu engranger des excédents budgétaires ; or, le déficit primaire est resté positif. À partir de 1993, le taux de croissance du PIB s'élève, le déficit a été réduit, ce qui a permis de stabiliser la dette jusqu'en 2003.

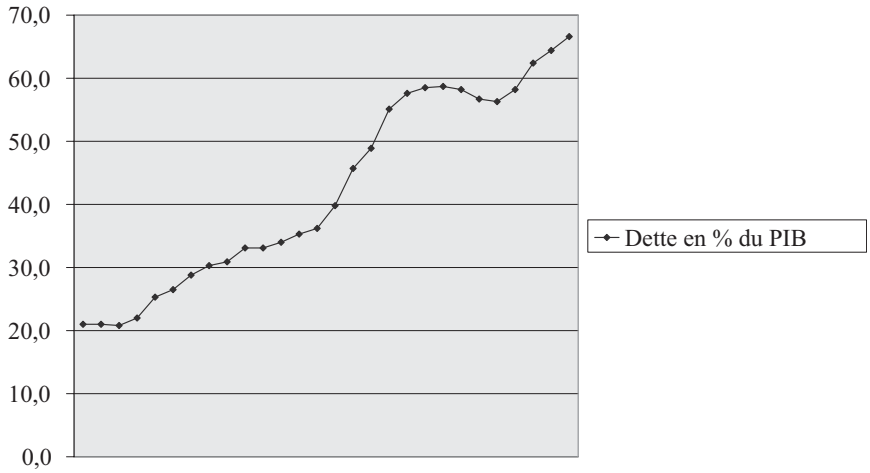


FIGURE 4
Taux d'endettement de la France (1978 : 2006)

4.2. Soutenabilité de la politique budgétaire

Imposer des bornes supérieures pour le rapport dette/PIB et le rapport déficit/PIB s'explique en partie par la crainte de voir l'État perdre le contrôle de sa dette : la contrainte budgétaire (6.8) montre que, pour maintenir le taux d'endettement à 60 % avec un taux d'intérêt réel de 3 % et un taux de croissance de 2 %, on doit avoir un taux de déficit public $(G_t + r_t B_{t-1} - T_t)/Y_t$ juste égal au seuil de Maastricht de 3 %.

La contrainte budgétaire ne nous permet cependant pas à elle seule de rendre compte de la limite imposée à l'endettement lui-même. Dans (6.8), la dynamique de

1. Durant les années 1960, le taux de croissance du PIB était suffisamment élevé pour que la dette baisse d'elle-même, c'est-à-dire sans qu'un surplus primaire soit nécessaire. Durant les années 1970, le taux de croissance et le taux d'intérêt réel ont baissé, et la dette est restée à peu près stable.

la dette dépend du rapport entre le taux d'intérêt réel et le taux de croissance de l'économie. Un taux d'intérêt élevé ou un taux de croissance faible favorise la croissance du taux d'endettement ; mais le volume lui-même de la dette ne joue aucun rôle.

Ce que cette contrainte ne prend pas en compte, c'est le lien entre la dette, le taux d'intérêt et le taux de croissance. Par exemple, une hausse de la dette désirée pourrait s'accompagner d'une hausse du taux d'intérêt réel, et cette hausse, en décourageant la demande agrégée, conduire à une baisse du taux de croissance de l'économie qui provoque une envolée de l'endettement.

Nous allons examiner dans cette section s'il existe une limite à la dette au-delà de laquelle elle explose au cours du temps en prenant en compte un lien entre dette, taux d'intérêt et taux de croissance de la production. C'est la question de la « soutenabilité » de la dette.

Supposons que le déficit primaire par tête soit constant au cours du temps :

$$q_t = g_t - t_{1t} - \frac{t_{2t}}{1+n} = q,$$

où t_{1t} est l'impôt payé par les jeunes en t, et t_{2t} celui qui est payé par les vieux en t. Pour financer ce déficit, l'État recourt à la dette.

À la date t, l'évolution de la dette publique qui suit de (6.4) est décrite par

$$b_t = \frac{1+r_t}{1+n} b_{t-1} + q, \tag{6.9}$$

une expression très voisine de (6.8) si l'on confond le taux de croissance démographique et le taux de croissance de la production agrégée.

Supposons pour simplifier que les agents sont tous identiques : $e_1^h = e_1$ et $e_2^h = e_2$. Notons

$$s_t + b_t = s\left(r_{t+1}, e_1 - t_{1t} + \frac{e_2 - t_{2t}}{1+r_{t+1}}\right)$$

l'épargne totale d'un ménage de la génération t. À l'équilibre, $s_t = 0$, et donc :

$$b_t = s\left(r_{t+1}, e_1 - t_{1t} + \frac{e_2 - t_{2t}}{1+r_{t+1}}\right) \tag{6.10}$$

pour tout t.

Un équilibre intertemporel est donc une suite $(b_t, r_t, t \geqslant 0)$ telle que (6.9) et (6.10) sont satisfaites pour tout $t \geqslant 0$, et avec b_0 donnée.

Supposons tout d'abord que $q = 0$. Les équilibres stationnaires sont tels que

$$b = \frac{1+r}{1+n} b, \tag{6.11}$$

et

$$b = s\left(r, e_1 - t_1 + \frac{e_2 - t_2}{1+r}\right). \tag{6.12}$$

Il existe deux types de situations stationnaires :

1. $b = 0$ dans (6.11) et r est un taux d'intérêt défini par (6.12) ;
2. $r = n$ dans (6.11) et $b = b^*$ est défini par (6.12).

En principe, $b^* \neq 0$ dans la seconde situation. Le signe de b^* est toutefois indéterminé : l'économie peut épargner ou au contraire être endettée à l'équilibre stationnaire. On se placera dans cette section dans le cas où $b^* > 0$[1].

L'économie se trouve alors à la règle d'or. La relation entre la dette publique et l'efficacité dynamique sera étudiée dans le chapitre 7. Si l'épargne est croissante avec le taux d'intérêt réel, l'équilibre stationnaire dans lequel la dette est nulle doit être dynamiquement inefficace ($r < n$) ; sinon, $b^* < 0$, ce qui contredit l'hypothèse précédente.

Lorsque le déficit par tête est nul ($q = 0$), la dynamique de la dette publique est très simple à étudier. Supposons que la dette initiale b_0 est supérieure à b^*. Par (6.10), et en utilisant l'hypothèse d'une épargne agrégée croissante avec le taux d'intérêt (anticipé), on en déduit $r_1 > n$. Et (6.9) implique alors que $b_1 > b_0$; plus généralement, si $b_t > b^*$, alors $b_{t+1} > b_t$: la dette explose au cours du temps. Il existe donc un seuil à partir duquel la dette n'est plus solvable, et il est plus petit que (ou égal à) b^*. Si, au contraire, b_0 est inférieure à b^*, l'argument inverse s'applique : si $b_t < b^*$, alors $b_{t+1} < b_t$ et la dette converge vers 0.

En ce sens, b^* est le volume maximal de dette soutenable lorsque le déficit primaire est nul. On dit alors que la dette est *soutenable* lorsqu'elle est inférieure à ce montant. Le mécanisme économique à l'œuvre est très intuitif : lorsque la dette est importante, le taux d'intérêt doit être élevé à l'équilibre pour que les ménages acceptent de détenir un tel volume de dette, ce qui implique un intérêt sur la dette élevé, et une envolée de la dette au cours du temps. La figure 5 décrit la dynamique de la dette en s'appuyant uniquement sur la propriété précédente : $b_{t+1} > b_t \Leftrightarrow b_t > b^*$ (et le fait que $b = 0$ est un équilibre stationnaire).

Lorsque $q > 0$, en tout équilibre stationnaire $b^* > 0$, on a :

$$b^* = \frac{1+r}{1+n} b^* + q \Leftrightarrow \frac{1+r}{1+n} = 1 - \frac{q}{b^*} < 1 \Rightarrow r < n.$$

Si le déficit primaire est positif, l'équilibre stationnaire $b^* > 0$ est dynamiquement inefficace.

La dynamique de la dette décrite par (6.9) et (6.10) implique que, pour toute dette b_t donnée, la dette publique b_{t+1} sera d'autant plus grande que le déficit à financer est grand. On en déduit la dynamique de la dette lorsque $q > 0$; elle est représentée sur la figure 6. La figure 6 décrit la dynamique de la dette pour un déficit primaire de plus en plus grand. Elle confirme qu'il existe bien une valeur $\bar{q}$ du déficit tel que $b_{t+1} > b_t$ pour tout b_0 si $q > \bar{q}$.

1. Gale (1973) appelle cette configuration « le cas Samuelson » pour une raison qui deviendra claire dans le chapitre suivant. Il l'oppose au « cas classique » dans lequel l'économie est endettée au niveau agrégé.

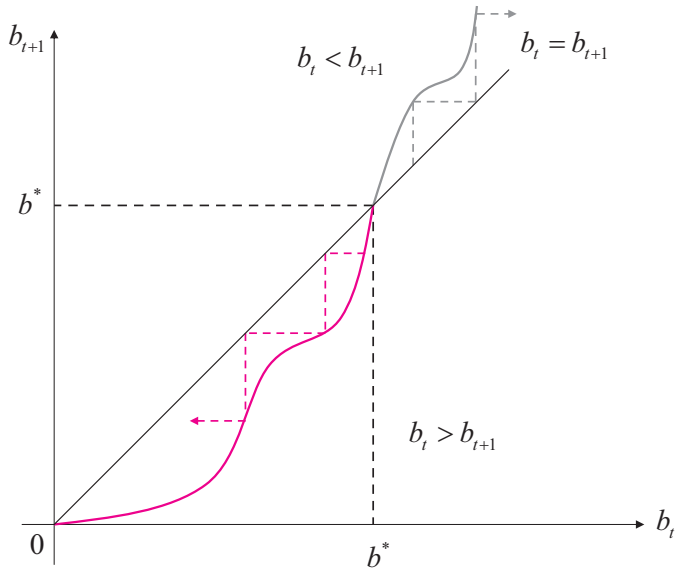


FIGURE 5
Solvabilité de la dette en l'absence de déficit primaire

L'intuition économique est la même que dans le cas précédent : la présence d'un facteur autonome (le déficit primaire) qui vient augmenter le volume de la dette ne fait que la renforcer.

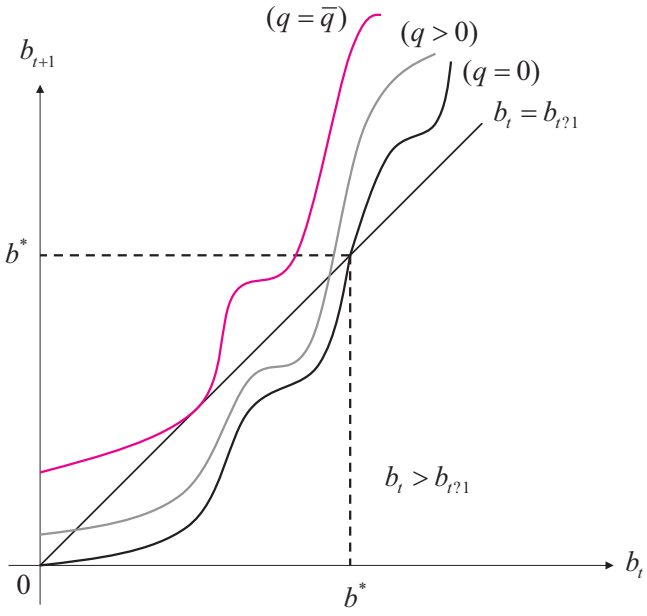


FIGURE 6
Solvabilité de la dette en présence de déficit primaire

4.3. Dette, efficacité et croissance

Il reste à prendre en compte les effets de la dette sur l'accumulation du capital. La dette publique, détenue par les ménages à l'équilibre, devrait impliquer une baisse de l'offre de capital physique. Lorsque l'économie a spontanément tendance à trop accumuler (dans le régime d'inefficacité dynamique), la consommation par tête augmente à long terme ; mais attention : la consommation comprend celle des ménages et celle de l'État !

Décrivons brièvement l'extension du modèle de Diamond (dans la version du chapitre 3) au cas où l'État émet une dette b_t et, pour simplifier, prélève à la date t un impôt t_t sur les vieux de la génération $t-1$ uniquement :

$$(1+n)b_t + t_t = (1+r_t)b_{t-1}.$$

Les deux contraintes budgétaires d'un ménage de la génération t s'écrivent alors :

$$c_{1t} + (s_t + b_t) = w_t,$$

et

$$c_{2t+1} = (1+r_{t+1})(s_t + b_t) - t_t.$$

Soit

$$s_t + b_t = s\left(r_{t+1}, w_t - \frac{t_t}{1+r_{t+1}}\right)$$

l'épargne totale du ménage. Supposons que $b_t = b$ et donc que $t_t = (r_t - n)b$. En un équilibre stationnaire, on a :

$$s\left(r(k^*), w(k^*) - \frac{r(k^*)-n}{1+r(k^*)}b\right) - b = (1+n)k^*.$$

En différentiant cette expression, on obtient, pour une petite dette (b proche de 0) :

$$\left(s_r r'(k^*) + s_w w'(k^*) - (1+n)\right)\frac{dk}{db} = 1 + s_w \frac{r(k^*)-n}{1+r(k^*)}.$$

Considérons un équilibre stationnaire localement stable. Alors, le coefficient devant dk/db est négatif (cf. chapitre 2). Si l'économie est dynamiquement efficace, $r(k^*) > n$, alors la dette publique provoque effectivement une baisse du stock de capital à long terme. Une petite dette réduit donc l'accumulation du capital dans le cas plausible empiriquement où l'économie est dynamiquement efficace. On montre en annexe (cf. annexe 4) qu'elle freine également la croissance.

5. ANNEXES

5.1. Compte des administrations publiques

Dépenses et recettes des Administrations Publiques (en Mds d'euros)	2006
DÉPENSES	
Dépenses de fonctionnement	**336,5**
Consommations intermédiaires (P2)	94,0
Rémunération des salariés (D1)	234,7
dont cotisations sociales imputées (D122)	33,1
Impôts sur la production (D29)	7,6
Revenus de la propriété autres que les intérêts (D4 hors D41)	0,0
Impôts courants sur le revenu et le patrimoine (D5)	0,1
Intérêts (D41)	**46,4**
Prestations et autres transferts	**511,1**
Prestations sociales autres que transferts sociaux en nature (D62)	318,5
Transferts sociaux en nature de biens et services marchands (D63 - partie)	101,7
Subventions (D3)	26,6
Transferts courants entre administrations publiques (D73)	0,0
Autres transferts courants (D7 hors D73)	51,1
Transferts en capital (D9 hors D995)	13,2
Acquisitions nettes d'actifs non financiers	**62,7**
Formation brute de capital fixe (P51)	60,1
Autres acquisitions nettes d'actifs non financiers (P52, P53, K2)	2,6
Total des dépenses	**956,7**
RECETTES	
Recettes de production	**59,5**
Production des branches marchandes et ventes résiduelles (P11)	48,2
Production pour emploi final propre (P12)	1,6
Paiements partiels des ménages (P13 - partie)	6,9
Autres subventions sur la production (D39)	2,9
Revenus de la propriété	**12,2**
Intérêts (D41)	3,0
Revenus de la propriété autres que les intérêts (D4 hors D41)	9,2
Impôts et cotisations sociales	**821,0**
Impôts sur la production et les importations (D2)	275,9
Impôts courants sur le revenu et le patrimoine (D5)	211,8
Impôts en capital (D91)	8,3
Transferts de recettes fiscales (D733)	0,0
Cotisations sociales (D61)	328,1
dont cotisations sociales imputées (D612)	33,1
Impôts et cotisations dus non recouvrables nets (D995)	-3,1
Autres transferts	**17,9**
Transferts courants entre administrations publiques (D73 hors D733)	0,0
Autres transferts courants (D7 hors D73)	13,7
Transferts en capital (D9 hors D91, D995)	4,1
Total des recettes	**910,5**
SOLDES	
Capacité (+) ou besoin (-) de financement	**-46,2**

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

FIGURE 7
Compte des administrations publiques

5.2. Les recettes fiscales

Principaux impôts par catégorie (en mds d'euros)	2006
Impôts de type TVA (D211)	**131,0**
TVA	131,0
Impôts de type droits de douanes (D212)	**1,8**
Impôts sur les produits (D214)	**71,3**
Taxe Intérieure sur les produits pétroliers	24,4
Taxes sur les tabacs	9,7
Droits d'enregistrement (taxe addi.)	9,9
Taxes spéciales sur les conventions d'assurances	5,5
TVA sur les terrains	0,7
Taxes sur les boissons	3,0
Produits de la loterie nationale et du loto	2,0
Impôt sur l'énergie électrique	1,2
Taxe pour le fonds du service public de la production d'électricité	1,7
Impôts sur les salaires et la main d'œuvre (D291)	**21,4**
Taxes sur les salaires	10,0
Versements transports	5,3
Taxe au profit du FNAL (fonds national d'aide au logement)	1,9
Caisse nationale de solidarité pour l'autonomie (CNSA)	1,7
Impôts divers sur la production (D292)	**55,0**
Taxe professionnelle (TP)	21,0
Cotisation minim. taxes profession.	2,1
Taxe sur le foncier bâti et non bâti (payée par les entreprises)	20,8
TVA sur subventions et sous/compensations agricultures	0,5
Contribution sociale de solidarité des sociétés	4,6
Impôts courants sur le revenu et le patrimoine (D51)	**194,4**
Contribution sociale généralisée (CSG)	75,2
CSG affectée à la CNSA	1,0
Contribution au Remboursement de la Dette Sociale	5,5
Impôt sur le revenu	52,4
PRCM (prélèvements sur les capitaux mobiliers)	3,2
Prélèvements social de 2 % sur le revenu du capital	2,0
Contribution additionnelle au prélèvement social affectée à la CNSA	0,4
Impôts sur les sociétés (inclus impôt forfaitaire annuel)	49,0

FIGURE 8
Détail des recettes fiscales

5.3. Du déficit à la variation de la dette

Du déficit des administrations publiques à la variation de leur dette au sens de Maastricht	2006
Déficit des administrations publiques (*)	45,3
Acquisition d'actifs nettes des cessions (1)	-33,3
AF2 Numéraires et dépôts	-29,7
AF3 Titres hors actions	3,8
AF4 Crédits	-0,9
AF5 Actions et autres participations	-10,6
AF7 Créances commerciales et décalages comptables	4,0
Variation du passif financier hors dette de Maastricht (2)	
PF28, 38, 48 Intérêts courus non échus	-1,3
PF7 Créances commerciales et décalages comptables	8,2
Changements de volume (3)	
K10, K12 Changement de classement et autres changements de volumes	0,1
K11 Valorisation de la dette en devises	0,0
Variation de la dette au sens de Maastricht = Déficit + (1) - (2) + (3)	
Évolution totale	**5,1**

En milliards d'euros

Source : Comptes nationaux - Base 2000, Insee

(*) Au sens du Traité de Maastricht, hors flux de SWAP.

FIGURE 9
Dette et déficit

5.4. Dette publique et croissance

La condition d'équilibre intertemporel s'écrit :

$$s\left(r(k_{t+1}), w(k_t) - \frac{r(k_t)-n}{1+r_{t+1}}b\right) - b = (1+n)k_{t+1}$$

En différentiant au point $k_t = k_{t+1} = k^*$ et $b = 0$, on obtient :

$$-\left(1 - s_w \frac{n-r^*}{1+r^*}\right)db + s_w w' dk_t + \left(s_r r' - (1+n)\right)dk_{t+1} = 0.$$

Le taux de croissance de l'économie en t baisse avec la dette lorsque

$$\frac{\partial}{db}\left(\frac{k_{t+1}}{k_t}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{(1+n) - s_r r'}{s_w w'} < 0,$$

où nous avons pris en compte que le stock de capital courant est donné, mais quelconque. Si l'équilibre est localement stable, $s_r r' + s_w w' - (1+n) < 0$, et donc $s_r r' - (1+n) < 0$ puisque $s_w w' > 0$. L'inégalité précédente est donc satisfaite.

6. REPÈRES BIBLIOGRAPHIQUES

Muet (1992), sections 5.1 et 5.2 fournit une présentation du modèle IS-LM à prix fixes et flexibles qu'il est très recommandé de lire ; une présentation simple est aussi donnée dans Blanchard et Cohen (2002), chapitres 5, 6, 7 et 8. Une partie de ce chapitre s'inspire de Azariadis (1993), chapitres 19, 20 et 21. Les données utilisées sont tirées des comptes nationaux. Elles sont accessibles en ligne sur le site de l'INSEE.

CHAPITRE 7

La monnaie dans le long terme

1. INTRODUCTION

Jusqu'à présent, la monnaie n'a pas été prise en compte. Le transfert de richesse au cours du temps s'effectuait par l'intermédiaire de la production ou de la dette publique : renoncer à consommer à un instant donné correspondait à une offre de facteurs de production ultérieure et, pour cette raison, donnait lieu à rémunération une fois le processus de production achevé. On pourrait voir ce cadre comme résumant une situation dans laquelle il n'y aurait qu'un seul bien, le blé, qui serait soit consommé soit conservé pour être semé et donner lieu à production lors de la saison suivante.

Dans ce chapitre, nous allons introduire la monnaie et décrire certains de ses effets dans le long terme.

Les conséquences de la monnaie sur l'économie réelle figurent parmi les thèmes les plus anciens de la théorie économique. Selon Blaug (1985), la théorie monétaire s'est organisée autour d'une forme de « théorie quantitative de la monnaie ». Cet ensemble de théories cherche à lier la monnaie au revenu et au niveau général des prix ; et, selon Friedman et Schwartz (1963), « il n'y a aucune autre relation empirique en économie dont on ait pu observer la répétition si régulièrement ». Elle prédit qu'une hausse de la quantité de monnaie, si elle peut avoir un effet de relance sur l'activité à court terme, se traduit à plus long terme par une hausse du niveau général des prix qui affaiblit, voire annule la relance réelle initiale. La figure 1, tirée de Walsh (2003), reporte la corrélation entre le produit agrégé à un instant donné et la quantité de monnaie durant les deux années qui la précèdent et les deux années qui la suivent, aux États-Unis, entre 1967 et 2000. On constate que le produit courant est lié positivement à la quantité de monnaie courante, mais qu'il dépend de moins en moins, voire négativement de la quantité de monnaie.

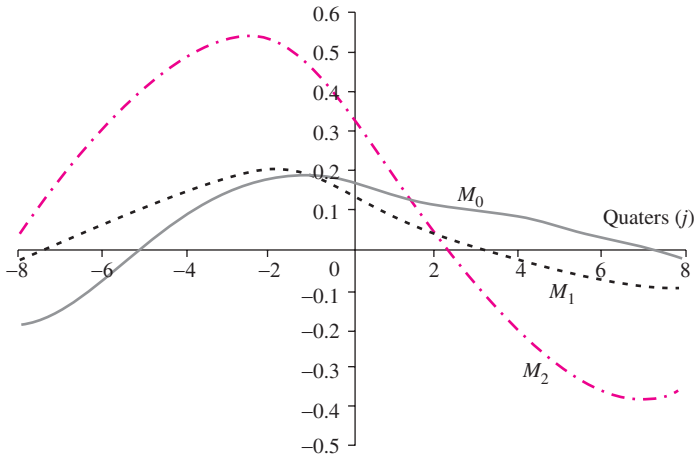


FIGURE 1
Corrélation entre le PIB et la masse monétaire au chapitre du temps

Ce type de relation s'accorde avec les prédictions de la théorie quantitative. Mark Blaug distingue deux mécanismes principaux au travers desquels la monnaie est susceptible d'influencer les prix. Selon le premier, le « mécanisme direct », qu'il attribue à Richard Cantillon[1], une hausse de la quantité de monnaie s'accompagne à court terme d'une hausse du pouvoir d'achat des ménages, d'une hausse de la demande et finalement d'une hausse des prix. Selon le second, le « mécanisme indirect », qu'il attribue à Henry Thornton[2] et qui aurait inspiré Keynes, une hausse de la quantité de monnaie conduit à une baisse du taux d'intérêt qui incite les entreprises à investir, la hausse de la demande agrégée qui en résulte se soldant finalement par une hausse des prix. Dans les deux cas, la hausse de prix implique à moyen terme une baisse de la demande et de la production.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par décrire les trois principales manières d'introduire la monnaie employées aujourd'hui dans les modèles de la macroéconomie dynamique. Chacune s'appuie sur l'une des trois fonctions classiques de la monnaie : la monnaie est une unité de compte, un instrument d'échange et une réserve de valeur au cours du temps. Bien qu'elles soient assez éloignées les unes des autres, elles font toutes les trois jouer un rôle particulier à l'égalité entre le taux d'intérêt réel et le taux de déflation. L'un des objectifs de ce chapitre est de cerner le sens de cette égalité, la « règle de Friedman », et notamment de la rapprocher d'une théorie de la quantité optimale de monnaie.

Une telle règle présuppose que la monnaie coexiste avec un autre actif, par exemple le capital. Il est donc naturel de se demander si, à long terme, les agents continueront à utiliser la monnaie, plutôt que de détenir uniquement du capital. Lorsque tel est le cas,

1. *Essai sur la Nature du Commerce*, 1755.
2. *Inquiry Into the Nature of the Paper Credit of Great Britain*, 1802.

les économistes parlent de « bulle » dans laquelle un actif sans valeur intrinsèque (le papier-monnaie) reste détenu dans le long terme. Ce chapitre suggère que l'obtention d'un équilibre monétaire reste fragile à long terme, parce qu'il dépend avant tout de la confiance accordée au maintien du pouvoir d'achat de la monnaie.

Enfin, le chapitre conclura en revenant sur le rôle de la monnaie comme source de financement de la politique budgétaire, au travers du seigneuriage.

2. INTRODUIRE LA MONNAIE

L'un des principaux rôles de la monnaie est de servir d'intermédiaire universellement accepté dans les échanges de biens. La monnaie permet en effet de résoudre le problème de la « double coïncidence des désirs »nécessaire pour qu'un échange de biens se réalise : en l'absence de monnaie, je peux obtenir un bien que je n'ai pas uniquement si je trouve un autre agent qui le possède et qui accepte de me le céder en contrepartie d'un bien que je possède ; l'intervention de tiers peut rendre plus complexe l'acquisition, par exemple lorsque la personne qui possède le bien que je désire n'accepte pas le bien dont je dispose, mais que je peux échanger ce dernier contre un troisième bien possédé par un tiers, ce troisième bien étant désiré par la personne qui possède le bien que je désire. Confrontée au troc, la monnaie, acceptée par tous, facilite clairement les échanges de biens.

Il y a trois façons principales d'introduire la monnaie dans un modèle macroéconomique. Chacune cherche à se positionner face à cette intuition, même si elle en reste toujours un peu éloignée[1].

La première consiste à partir d'une économie dans laquelle certains échanges mutuellement avantageux sont irréalisables en l'absence de monnaie et où l'introduction de la monnaie est socialement bénéfique. Une telle situation a été illustrée par Samuelson (1958) dans une version simple et célèbre du modèle à générations imbriquées. La monnaie y remplit les trois fonctions : elle sert de numéraire, ouvre la possibilité de nouveaux échanges, et permet de transférer de la richesse au cours du temps.

La deuxième présuppose que la monnaie doit servir d'intermédiaire dans les échanges : il est donc nécessaire que certains individus au moins disposent d'un stock de monnaie en début de période, avant que des échanges de biens aient lieu. Une telle contrainte est appelée « contrainte d'encaisses préalables » ou « contrainte de liquidité ». Elle est associée aux travaux menés par Robert Clower et Axel Leijonhufvud à la fin des années 1960.

La dernière façon d'introduire la monnaie semble à première vue assez cavalière : elle consiste simplement à attribuer aux agents un goût pour la monnaie. Il serait en fait possible de justifier ces préférences en présence de contraintes de liquidité. Une telle approche présente néanmoins un avantage certain : puisque les ménages apprécient la monnaie, il est possible d'examiner s'il existe une quantité optimale de

1. Cf. Kiyotaki et Wright (1989) pour un modèle plus proche de cette intuition.

monnaie dont on devrait les doter et d'évaluer les coûts associés à une déviation de cette politique avec les outils traditionnels de la microéconomie.

2.1. Le modèle de Samuelson

Samuelson (1958) a introduit une variante du modèle à générations imbriquées du chapitre 3 dans laquelle l'introduction de la monnaie peut permettre des échanges mutuellement avantageux qui n'auraient pas eu lieu en l'absence de monnaie[1].

2.1.1. Le cadre

La structure de ce modèle est très voisine de celle de Diamond (1965) mais elle se résume, dans sa version de base, à une économie d'échange (la production sera introduite plus tard dans ce chapitre). À la date t naissent les N_t individus de la génération t ; ils sont en vie durant deux périodes consécutives, t (ils sont alors jeunes) et $t+1$ (ils sont vieux). La population croît au taux constant n (on a donc $N_{t+1} = (1+n)N_t$) ; lors de la période initiale, $t = 0$, coexistent une génération initiale de N_{-1} individus vieux (et nés vieux en 0) et d'une génération de N_0 individus jeunes (nés eux aussi en 0).

Les préférences d'un individu de la génération t sont encore représentées par la fonction d'utilité

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}). \tag{7.1}$$

On supposera que la fonction u satisfait les conditions habituelles suivantes : $u'(\cdot) > 0$, $u''(\cdot) < 0$, $u'(0) = +\infty$ et $u'(\infty) = 0$.

L'utilité marginale de la consommation étant arbitrairement grande si le ménage ne consomme rien durant sa seconde période de vie, il est évident que les agents jeunes souhaiteront transférer une partie de leur dotation de première période vers la seconde si leur dotation est suffisamment faible lorsqu'ils sont vieux. Ici rentre en jeu une hypothèse importante du modèle. Elle concerne la distribution des revenus au cours du temps. Chaque jeune reçoit une dotation de $e_1 = e > 0$ biens périssables, tandis que les vieux ne disposent d'aucun revenu *a priori*, c'est-à-dire s'ils ne peuvent pas transférer leur richesse au cours du temps, $e_2 = 0$.

2.1.2. L'optimum social

Aucun échange n'est possible dans cette économie. Pour répartir sa richesse sur ses deux périodes de vie, un individu doit céder une partie de sa dotation individuelle e durant sa jeunesse pour consommer durant sa vieillesse. Tous les agents d'une même génération sont identiques, de sorte que seuls sont envisageables des échanges intergénérationnels : tous les agents jeunes voudraient épargner pour leurs vieux jours, aucun jeune ne souhaite se porter prêteur. Les seuls individus avec lesquels un jeune est aujourd'hui en présence sont les vieux de la génération précédente, qui auront disparu lors de la période suivante ; les individus susceptibles de lui fournir des biens demain ne sont pas encore nés ! Il est clair que les vieux de la période courante

1. Ce modèle a été introduit et utilisé par Maurice Allais, dans *Économie et Intérêt*, publié en français en 1947.

seraient très contents de récupérer l'épargne des jeunes pour la consommer, mais que les jeunes refuseront de leur prêter quoique ce soit puisque ces vieux emprunteurs ne pourront pas assurer le remboursement ni du principal ni de l'intérêt, lorsque les jeunes seront devenus vieux. Il faudrait qu'un jeune aujourd'hui puisse prêter aujourd'hui à une personne qui lui procurera en contrepartie un revenu demain. La génération courante de jeunes coexistera demain avec la génération de jeunes qui va la suivre immédiatement. À ce stade, il n'existe pas d'institutions permettant d'échanger des biens avec des agents qui ne sont pas encore nés. Aussi, à l'équilibre, il n'y a pas d'échange possible : on doit avoir $c_{1t} = e$ et $c_{2t+1} = 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

Cette solution n'est évidemment pas efficace : supposons que l'on impose à chaque individu jeune de consommer $dc_1 > 0$ unités de biens en moins et que l'on transfère lors de la même période, disons t, ces biens aux vieux. Chaque jeune perd $u'(e)dc_1$. L'État récupère $N_t dc_1$ biens, et les répartit uniformément entre les N_{t-1} vieux : chaque vieux reçoit donc en t un supplément de biens $dc_2 = (1+n)dc_1 > 0$, de sorte que le bien-être de chaque vieux augmente de $u'(0)dc_2 = u'(0)(1+n)dc_1$. Si cette politique est répétée lors de chaque période, le bien-être de chaque *génération* varie de $[\beta u'(0)(1+n) - u_1'(e)]dc_1$ (sauf pour la génération initiale de vieux, pour laquelle il augmente de $(1+n)dc_1 > 0$).

Si $\beta u'(0)(1+n) - u_1'(e) > 0$, ce qui est vrai pour $u'(0) = +\infty$ et $u'(e)$ fini, chaque génération (y compris la génération initiale de vieux) voit son bien-être augmenter. On a donc réalisé une amélioration au sens de Pareto.

Cette réforme cesse d'être avantageuse en (c_1^*, c_2^*) tel que

$$\beta \frac{u'(c_2^*)}{u_1'(c_1^*)} = \frac{1}{1+n}, \tag{7.2}$$

c'est-à-dire lorsque le taux marginal de substitution $\beta u'(c_2^*)/u'(c_1^*)$ du bien 2 au bien 1 est égal à $1/(1+n)$, qui s'interprète comme un prix relatif du bien 2 en terme de bien 1 du point de vue de la société dans son ensemble. L'égalité (7.2) et la condition de réalisabilité

$$N_t c_1^* + N_{t-1} c_2^* = N_t e \tag{7.3}$$

définissent l'optimum de cette économie.

Nous allons voir comment l'introduction de la monnaie, en autorisant des échanges entre des générations qui ne coexistent pas directement, peut permettre d'atteindre un tel optimum.

2.1.3. La monnaie hélicoptère

Supposons qu'à la date $t = 0$, l'État émette $\bar{M}$ unités de monnaie et les distribue (uniformément) aux vieux (chaque vieux reçoit $\bar{M}/N_{-1}$ unités de monnaie). Friedman a qualifié cette monnaie tombant du ciel de *monnaie hélicoptère*. Soit p_t le prix d'un bien de consommation en monnaie (c'est donc le nombre d'unités de monnaie que l'on doit céder pour obtenir en contrepartie un bien de consommation). Les agents jeunes vont chercher à échanger des biens contre de la monnaie (ils offrent des biens et demandent de la monnaie) alors que les agents vieux cherchent à faire le contraire :

ils possèdent la monnaie et veulent l'échanger contre des biens (ils offrent de la monnaie et demandent des biens). On devine qu'un équilibre dans lequel des transactions entre les différentes générations ont lieu est désormais possible, au moins si les jeunes ne croient pas que la monnaie aura perdu toute sa valeur demain ($p_t \to +\infty$).

Pour le vérifier, notons M_t^d la demande (individuelle) de monnaie en t. Les contraintes budgétaires d'un individu jeune en t s'écrivent :

$$p_t c_{1t} + M_t^d \leqslant p_t e, \tag{7.4}$$

et

$$p_{t+1} c_{2t+1} \leqslant M_t^d. \tag{7.5}$$

On en déduit la contrainte de budget intertemporelle

$$c_{1t} + (1+\pi_{t+1}) c_{2t+1} \leqslant e,$$

où π_{t+1} est le taux d'inflation (anticipé), $1+\pi_{t+1} = p_{t+1}/p_t$. Cette contrainte montre qu'à l'optimum du ménage $c_{1t} = c_1(1+\pi_{t+1}, e)$ et $c_{2t+1} = c_2(1+\pi_{t+1}, e)$ sont tels que

$$\beta \frac{u'(c_{2t+1})}{u'(c_{1t})} = 1+\pi_{t+1}, \tag{7.6}$$

et saturent les contraintes (7.4) et (7.5). Le taux marginal de substitution du bien 2 au bien 1 est égal au prix relatif du bien 2. On en déduit la demande de monnaie $M_t^d = p_t(e - c_1(1+\pi_{t+1}, e))$, et l'on note

$$\frac{M_t^d}{p_t} = m(1+\pi_{t+1}, e) \tag{7.7}$$

la demande d'encaisses réelles correspondante. La fonction $m(\cdot)$ coïncide avec la fonction d'épargne réelle $s(\cdot)$ du chapitre 3, en posant $1/(1+r_{t+1}) = 1+\pi_{t+1}$ (et en assimilant e au salaire).

La demande d'encaisses réelles est donc croissante avec e : une hausse de e conduit à une hausse de la consommation lors de chaque période, et la contrainte budgétaire de seconde période implique que l'encaisse de monnaie détenue doit augmenter.

Les variations du taux d'inflation ont un effet ambigu. Une hausse du taux d'inflation s'apparente en effet à une baisse du taux de rendement réel de l'épargne (lorsqu'un agent renonce à consommer un bien durant sa jeunesse, en t, il reçoit en contrepartie p_t unités de monnaie supplémentaires, qui lui permettront d'acheter $p_t/p_{t+1} = 1/(1+\pi_{t+1})$ biens supplémentaires durant sa vieillesse) et l'on sait que les conséquences sur l'épargne d'une modification du taux d'intérêt dépendent d'un effet de substitution et d'un effet de revenu qui s'opposent lorsque le ménage souhaite épargner. Précisément : une hausse du taux d'inflation correspond à une hausse du prix relatif du bien futur qui conduit à une baisse de la consommation en deuxième période et à une hausse de la consommation en première période (effet de substitution) et, comme la hausse d'un prix ampute le revenu des ménages, elle conduit à une baisse de la consommation lors des deux périodes (effet de revenu). Au total, une hausse de l'inflation conduit à une baisse de l'encaisse réelle désirée par l'effet de substitution et à une hausse de cette encaisse par l'effet de revenu.

2.1.4. Équilibres avec prévisions parfaites

Il y a deux marchés ouverts lors de chaque période, le marché des biens et le marché de la monnaie. Un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites est une situation dans laquelle on a :

1. L'offre est égale à la demande sur chacun de ces deux marchés à chaque date t, $t \geqslant 0$, soit
$$N_t c_{1t} + N_{t-1} c_{2t} = N_t e,$$
$$N_t M_t^d = \bar{M}.$$
2. Les individus de chaque génération sont rationnels : ils choisissent un plan de consommation, et ainsi une encaisse réelle, qui maximise (7.1) sous les deux contraintes (7.4) et (7.5). On a donc :
$$(1+\pi_{t+1})\, u'(c_{1t}) = \beta u'(c_{2t+1}),$$
$$p_t c_{1t} + M_t^d = p_t e,$$
$$p_{t+1} c_{2t+1} = M_t^d,$$
$$M_t^d = p_t m(1+\pi_{t+1}, e),$$
pour tout $t \geqslant 0$.

L'application de la loi de Walras nous permet de ne considérer qu'une seule des deux égalités offre/demande. Pour le voir, supposons que le marché de la monnaie soit équilibré à chaque date ; cela implique notamment que $N_t M_t^d = N_{t-1} M_{t-1}^d = \bar{M}$. Alors, la somme de (7.4), écrite en t, et de (7.5) écrite en $t-1$, chacune multipliée par N_t et N_{t-1} respectivement, donne :

$$N_t c_{1t} + N_{t-1} c_{2t} = N_t e.$$

Le marché des biens est équilibré en t.

Dans la suite, on se concentrera sur le marché de la monnaie. Un équilibre est une suite de prix $(p_t, t \geqslant 0)$ telle que :

$$N_t m\left(\frac{p_{t+1}}{p_t}, e\right) = \frac{\bar{M}}{p_t}. \tag{7.8}$$

Le long d'une telle trajectoire, les jeunes en t anticipent un prix p_{t+1}. Étant donnée cette anticipation (ponctuelle) de prix, leur demande de monnaie dépend du prix courant p_t (c'est la fonction $p_t m(\cdot/p_t, \cdot)$). À l'équilibre, non seulement le prix courant assure l'égalité entre l'offre (exogène) et la demande agrégée de monnaie, mais il coïncide en outre avec le prix anticipé par les jeunes lors de la période précédente, $t-1$. L'équilibre a donc la nature d'un équilibre statique de la microéconomie (les agents optimisent et l'offre est égale à la demande) et suppose en outre réalisée une condition supplémentaire qui concerne les anticipations : les anticipations sont exactes (ou parfaites). Il s'agit pour cela d'un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites.

Concentrons-nous pour le moment sur les situations stationnaires. Nous pourrions être tentés de retenir comme candidats les situations dans lesquelles le prix reste constant au cours du temps, et ce prix satisfait (7.8). Ce n'est toutefois clairement pas possible : le niveau général des prix ne peut pas rester constant lorsque la population croît au taux $n > 0$: dans (7.8), puisque la demande individuelle d'encaisses réelles m serait constante, de sorte que la demande d'encaisses réelles agrégée augmenterait au taux n alors que l'offre agrégée $\bar{M}/p_t$ resterait constante. Dans ce cadre, c'est le taux de croissance des prix qui doit rester constant au cours du temps : on peut réécrire (7.8) comme donnant la dynamique de l'inflation à l'équilibre,

$$\frac{N_t}{N_{t-1}} \frac{m(1+\pi_{t+1}, e)}{m(1+\pi_t, e)} = \frac{1}{1+\pi_t}$$

$$\Leftrightarrow m(1+\pi_{t+1}, e) = \frac{m(1+\pi_t, e)}{(1+n)(1+\pi_t)}. \tag{7.9}$$

Un équilibre stationnaire est une suite de taux d'inflation telle que le taux de rendement réel de la monnaie (et ainsi le taux d'inflation) reste constant au cours du temps. Soit π le taux d'inflation correspondant. Pour $\pi_t = \pi$, on a $(1+n)(1+\pi) = 1$ et la condition du premier ordre (7.6) se réécrit :

$$\beta \frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{1}{1+n},$$

puisque la consommation par tête reste constante au cours du temps.

Nous pouvons maintenant vérifier qu'un équilibre (stationnaire) monétaire, s'il existe, est optimal. Notons pour cela que l'égalité précédente est la même que l'égalité (7.2). Comme le plan (c_1, c_2) est réalisable (du fait de l'égalité emplois-ressources sur le marché des biens), l'équilibre coïncide avec l'optimum de Pareto (c_1^*, c_2^*) caractérisé dans la section précédente.

Remarque 7.1

Pour π suffisamment proche de 0, $1/(1+\pi) \simeq 1-\pi$, de sorte qu'à long terme, le taux de croissance de la population, n, est égal au taux d'inflation $-\pi$, c'est-à-dire, pour $\pi > 0$, au taux de déflation, une propriété que nous allons retrouver plus loin dans le chapitre, et qui constitue la première forme prise dans ce chapitre par la règle de Friedman.

Remarque 7.2

S'il existe une technologie permettant de stocker les biens au cours du temps et ayant un rendement réel r, alors deux cas peuvent se présenter à long terme : (1) si $r \leqslant n$, le taux de rendement réel de la monnaie, n, reste supérieur à celui de l'actif, et l'équilibre stationnaire est encore défini comme ci-dessus, mais (2) si $r > n$, alors les ménages ne demanderont pas de monnaie, et l'équilibre (dans lequel les ménages jeunes épargnent en utilisant l'actif réel) n'est pas monétaire. La comparaison entre le taux d'intérêt réel et le taux de croissance démographique évoque l'(in)efficacité

dynamique. *Si l'équilibre de long terme d'une économie sans monnaie est dynamiquement inefficace, il existe un équilibre monétaire Pareto efficace ; sinon, il n'existe pas d'équilibre monétaire.* Bien sûr, la demande d'encaisses réelles influence l'offre de capital, et par ce canal, le taux d'intérêt réel. L'un des objectifs de la section 3 sera d'endogénéiser le taux d'intérêt.

2.2. Monnaie et contrainte de liquidité

2.2.1. Le cadre

Considérons un ménage dont la durée de vie est infinie, comme dans le chapitre 5, mais ayant accès à deux technologies différentes lui permettant de conserver sa richesse : le capital et la monnaie. À la date t, sur un petit intervalle de temps dt, sa contrainte budgétaire s'écrit

$$p_t \frac{dK_t}{dt} + \frac{dM_t}{dt} + p_t C_t = p_t F(K_t, N_t) + \frac{d\bar{M}_t}{dt},$$

où dM_t/dt représente la variation de l'encaisse monétaire désirée par le ménage et $d\bar{M}_t/dt$ un transfert monétaire de l'État au ménage. C'est au travers de ce transfert que la monnaie est introduite dans l'économie. Son introduction a une nature forfaitaire : le ménage ne peut pas se comporter de sorte à influencer le transfert qu'il reçoit. Pour résumer : entre t et $t+dt$, le ménage reçoit un revenu du travail et un revenu du capital (la somme de ces deux revenus est $p_t F(K_t, N_t)dt$) et un revenu de transfert $d\bar{M}_t$; avec ce revenu, il consomme et épargne en détenant du capital physique et/ou de la monnaie.

Définissons l'encaisse monétaire réelle par tête $m_t = M_t/p_t N_t$. Alors, en notant π_t le taux d'inflation en t (le taux de croissance du niveau général des prix p_t), la contrainte de budget instantanée devient :

$$\dot{k}_t + \dot{m}_t - \frac{d\bar{m}_t}{dt} = f(k_t) - c_t - nk_t - (n+\pi_t)(m_t - \bar{m}_t). \tag{7.10}$$

Cette contrainte montre qu'une unité de bien convertie en capital à l'instant t donnerait $(f'(k_t) - n)dt$ biens supplémentaires (par tête) en $t+dt$, alors qu'une unité de bien convertie en monnaie donnerait $-(\pi_t + n)dt$ biens supplémentaires (par tête) en $t+dt$. L'inflation ($\pi_t > 0$) joue à nouveau comme une taxe lorsque le ménage choisit de détenir de la monnaie, en venant réduire l'encaisse réelle qu'il détient. Nous reviendrons sur cette « taxe inflationniste » dans la section 4.

2.2.2. Le problème du ménage

Les préférences du ménage sont représentées par

$$\int_0^\infty u(c_t)\exp(-\theta t)dt. \tag{7.11}$$

Tant que $f'(k_t) + \pi_t \neq 0$, le ménage ne devrait conserver qu'un seul des deux actifs : le capital si $f'(k_t) - n > -\pi_t - n \Leftrightarrow f'(k_t) + \pi_t > 0$ et la monnaie si $f'(k_t) + \pi_t < 0$.

Nous allons toutefois imposer une contrainte additionnelle stipulant que les achats en biens de consommation entre t et $t+dt$ ne peuvent être financés que par la quantité de monnaie M_t détenue en t :

$$p_t C_t \leqslant M_t \Leftrightarrow c_t \leqslant m_t. \tag{7.12}$$

Cette contrainte de détention préalable (à l'achat de biens) d'un certain stock de monnaie est connue comme une « contrainte de liquidité » (« cash-in-advance constraint »), ou parfois « contrainte de Clower ». Elle se conforme, dans une certaine mesure, à l'adage de Clower selon lequel la monnaie achète les biens, les biens achètent la monnaie, mais les biens n'achètent pas les biens.

Pour résumer, le problème du ménage est de choisir une suite $(c_t, k_t, m_t, t \geqslant 0)$ de consommation, de capital et d'encaisse réelle qui maximise (7.11) sous les deux contraintes (7.10) et (7.12) pour tout t, $t \geqslant 0$, avec k_0 donné (et $c_t \geqslant 0$, $k_t \geqslant 0$ et $m_t \geqslant 0$).

Dans ce problème, la consommation c_t reste la seule variable de contrôle, mais il y a cette fois deux variables d'état, k_t et m_t (et non plus une seule, comme dans les chapitres 3 et 4). Notons λ_t le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de budget de la date t, évalué du point de vue de la date 0 et γ_t celui qui est associé à la contrainte de liquidité, évalué lui aussi du point de vue de la date 0. Rappelons que $\gamma_t = 0$ si la contrainte de liquidité n'est pas saturée (le ménage souhaite détenir plus de monnaie que ce qui lui est nécessaire pour consommer en t).

Le Hamiltonien s'écrit

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_t &= u(c_t)\exp(-\theta t) \\ &\quad +\lambda_t\left[f(k_t) - c_t - nk_t + (\pi_t + n)(\bar{m}_t - m_t) + \frac{d\bar{m}_t}{dt}\right] + \gamma_t(m_t - c_t),\end{aligned}$$

et les conditions nécessaires du premier ordre sont :

$$u'(c_t)\exp(-\theta t) - \lambda_t - \gamma_t = 0,$$

$$\dot{\lambda}_t = -\lambda_t(f'(k_t) - n)$$

$$\dot{\gamma}_t = \lambda_t(\pi_t + n) - \gamma_t$$

avec

$$\gamma_t(m_t - c_t) = 0.$$

En outre, (7.10) doit être satisfaite, et la condition de transversalité s'écrit :

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t(k_t + m_t) = 0.$$

2.2.3. Règle de Friedman et neutralité de la monnaie

Nous n'allons pas étudier toutes les propriétés dynamiques de ce modèle[1] mais considérer uniquement une situation stationnaire. Le taux de croissance de la masse monétaire est supposé constant, égal à μ :

$$\frac{1}{\bar{M}_t}\frac{d\bar{M}_t}{\bar{M}_t} = \mu.$$

À l'équilibre, le marché de la monnaie est équilibré : l'offre de monnaie $\bar{M}_t$ est égale à la demande de monnaie M_t pour tout t. En outre, en un équilibre de long terme, $\dot{m}_t = 0$. On a donc :

$$\frac{1}{\bar{m}_t}\frac{d\bar{m}_t}{dt} = \frac{\dot{m}_t}{m_t} = \mu - n - \pi_t = 0 \Rightarrow \pi_t = \pi = \mu + n.$$

Toute hausse du taux de croissance de la masse monétaire se traduit par une hausse identique du taux d'inflation. En un équilibre de long terme, $\dot{c}_t = \dot{k}_t = 0$. La condition (7.10) se réécrit :

$$f(k) = c + nk.$$

Si la contrainte de liquidité est saturée ($\gamma_t \geqslant 0$),

$$m = c.$$

En différentiant (par rapport au temps) la condition du premier ordre relative à la consommation, on obtient une version de l'équation d'Euler :

$$\dot{c}_t u''(c_t)\exp(-\theta t) - \theta u'(c_t)\exp(-\theta t) - \dot{\lambda}_t - \dot{\gamma}_t = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{c}_t = \left(-\frac{\dot{\lambda}_t + \dot{\gamma}_t}{\lambda_t + \gamma_t} - \theta\right) c_t \sigma(c_t)$$

En remplaçant $\dot{\lambda}_t$ et $\dot{\gamma}_t$ par $-\lambda_t(f'(k_t) - n)$ et $\lambda_t(\pi_t + n) - \gamma_t$, on vérifie immédiatement que la condition $\dot{c}_t = 0$ implique que les deux multiplicateurs sont proportionnels :

$$\big(f'(k) - \pi - 2n - \theta\big)\lambda_t + (1-\theta)\gamma_t = 0,$$

de sorte qu'ils doivent croître au même taux dans le long terme. Comme $\dot{c}_t = 0$ s'obtient si et seulement le taux de croissance de $\lambda_t + \gamma_t$ est égal à θ, et que ce taux est une moyenne pondérée de celui de λ_t et de celui de γ_t, on a :

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \frac{\dot{\gamma}_t}{\gamma_t} = \theta.$$

Mais alors

$$\dot{\lambda}_t = -\lambda_t(f'(k) - n) \Leftrightarrow f'(k) = n + \theta,$$

1. Elles ont été étudiées par Bloise, Bosi et Magris (2000). Il s'avère que la propriété de point-selle n'est pas toujours satisfaite, et donc que l'unicité de la trajectoire convergeant vers l'équilibre stationnaire n'est pas garantie.

c'est-à-dire $k = k^*_{or}$. Le stock de capital par tête de long terme est celui de la règle d'or modifiée, indépendamment du taux de croissance de la masse monétaire, μ. La condition de réalisabilité donne $c = f(k^*_{or}) - nk^*_{or}$, de sorte que la consommation n'est pas non plus affectée par le taux de croissance de la masse monétaire. Puisque la contrainte de liquidité est saturée, les encaisses réelles sont à long terme indépendantes de μ. Au total, une hausse de μ se traduit par une hausse identique du taux d'inflation à long terme, mais n'a pas d'effet sur les grandeurs réelles. On dit que la monnaie est super-neutre.

Sous quelle condition la contrainte de Clower est-elle saturée ? À long terme, le taux de rendement réel de la monnaie est égal à $-(n+\pi)$ alors que celui du capital est égal à $f'(k) - n$. La contrainte sera donc saturée si $-(n+\pi) < f'(k) - n$, soit $f'(k) > -\pi$, c'est-à-dire si le taux d'intérêt réel est supérieur au taux de déflation, ou bien encore si le taux d'intérêt nominal est nul. Le ménage préfèrerait alors épargner sous forme de capital, mais la contrainte de liquidité le contraint à conserver de la monnaie, dominée en terme de rendement, pour consommer. Cette condition est évidemment liée à la règle de Friedman. Lorsque $f'(k^*) + \pi = 0$, la valeur pour le ménage d'une unité de monnaie supplémentaire (mesurée par γ_t) devient nulle, ce qui est susceptible d'être une condition d'*optimalité de la quantité de monnaie*, s'il faut émettre de la monnaie jusqu'à satiété.

En fait, la contrainte de liquidité doit toujours être saturée à long terme (si $c > 0$). Pour le voir, supposons que cela ne soit pas le cas. Alors, la condition de Kuhn et Tucker implique que $\gamma_t = 0$, et comme λ_t décroît au taux θ (la consommation reste constante dans la première condition du premier ordre), on doit avoir $n = -\pi$ (le taux de croissance de $N_t p_t$ est nul), ce qui implique que l'offre de monnaie doit rester constante au cours du temps ($\mu_t = 0$) à l'équilibre stationnaire, s'il existe (puisque m est constant au cours du temps dans cette situation). Mais le rendement réel du capital est $f'(k) - n = \theta > 0 = n + \pi$: le capital est alors un actif qui domine la monnaie, de sorte que le ménage ne doit pas demander de monnaie. Mais alors, son encaisse réelle serait nulle, ce qui est impossible puisque sa consommation est positive à l'équilibre stationnaire considéré.

Remarque 7.3

Le même argument que ci-dessus montre qu'en l'absence de contrainte de liquidité, c'est-à-dire dans le modèle de Ramsey examiné dans le chapitre 4, pour une offre de monnaie constante au cours du temps ($\mu = 0$), on doit avoir $n = -\pi$, de sorte que le ménage ne demandera pas de monnaie ; il subsiste un excès d'offre de monnaie qui n'est pas compatible avec la définition d'un équilibre. Dans ce cas, il n'existe pas d'équilibre stationnaire.

Remarque 7.4

Abel (1985) a étudié une variante dans laquelle l'achat de capital est également soumis à une contrainte de liquidité :

$$c_t + \dot{k}_t + nk_t \leqslant m_t.$$

L'équilibre stationnaire se conforme alors à la règle d'or modifiée si la contrainte de liquidité n'est pas active. On a $\gamma = 0$ et le prix du capital, qui dépend du coût implicite à la contrainte de détention de la monnaie nécessaire à l'achat, n'est pas affecté. Il l'est sinon ; comme on peut s'y attendre, le coût du capital s'élève et le stock de capital par tête à long terme devient inférieur à celui qui prévaudrait à la règle d'or modifiée.

2.3. Monnaie dans la fonction d'utilité

Plutôt que d'utiliser un artifice sur la chronologie des transactions, Sidrauski (1967) postule directement que les préférences du ménage dépendent non seulement de sa consommation mais aussi de l'encaisse réelle qu'il détient. Soit $u(c_t, m_t)$ l'utilité instantanée du ménage à la date t. Du point de vue de la date $t = 0$, son bien-être s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} u(c_t, m_t) \exp(-\theta t) dt. \tag{7.13}$$

La monnaie sert toutefois encore d'actif permettant de transférer de la richesse au cours du temps. La contrainte de budget s'écrit donc :

$$\dot{k}_t + \dot{m}_t - \frac{d\bar{m}_t}{dt} = f(k_t) - c_t - nk_t - (n + \pi_t)(m_t - \bar{m}_t). \tag{7.14}$$

Le rendement (réel) d'une unité de capital par tête est égal à $r_t - n$ et celui de la monnaie est égal à $-\pi_t - n$: l'inflation, en augmentant le niveau général des prix, provoque une baisse du pouvoir d'achat du ménage.

Le Hamiltonien s'écrit

$$\mathscr{H}_t = u(c_t, m_t) \exp(-\theta t) + \lambda_t \left[f(k_t) - c_t - nk_t - (n + \pi_t)(m_t - \bar{m}_t) \right].$$

Les conditions du premier ordre sont analogues à celles obtenues dans la section précédente, sauf que l'utilité marginale de la consommation dépend cette fois de l'encaisse réelle détenue. Elles s'écrivent :

$$u_c(c_t, m_t) \exp(-\theta t) - \lambda_t = 0, \tag{7.15}$$

$$\dot{\lambda}_t = -u_m(c_t, m_t) \exp(-\theta t) + \lambda_t (n + \pi_t), \tag{7.16}$$

$$\dot{\lambda}_t = -\lambda_t \left(f'(k_t) - n \right), \tag{7.17}$$

auxquelles s'ajoute la condition de transversalité

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t \exp(-\theta t)(k_t + m_t) = 0.$$

La dynamique d'équilibre a été étudiée par Cohen (1985). Nous nous concentrerons ici sur l'équilibre de long terme, où la consommation par tête, l'encaisse réelle détenue et le stock de capital par tête sont constants.

Puisque l'utilité marginale de la consommation est constante, la valeur d'une unité de capital supplémentaire décroît au taux θ par (7.15). Soit

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\theta.$$

Et donc, par (7.17), $f'(k) = n + \theta$: le stock de capital par tête est celui de la règle d'or modifiée. Les agents demandent de la monnaie pour satisfaire leur désir d'encaisse, mais continuent d'accumuler comme dans le modèle de Ramsey.

Si l'offre de monnaie est égale à la demande de monnaie pour tout t, la consommation, définie par la contrainte budgétaire du ménage, est égale à $c = f(k) - nk$. Puisque le stock k est indépendant de la politique monétaire, la consommation c l'est aussi.

Par (7.16), le taux d'inflation doit rester constant : $\pi_t = \pi$; en effet :

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = -\theta = -\frac{u_m(c_t, m_t)}{\lambda_t \exp(\theta t)} + (n + \pi_t),$$

avec $\lambda_t \exp(\theta t)$ constant (puisque λ_t décroît au taux θ), tout comme $u_m(c_t, m_t)$ lorsque l'utilité marginale de la monnaie est évaluée à l'équilibre stationnaire.

Par définition de l'encaisse m_t, elle est constante au cours du temps si $\mu_t = \mu = n + \pi$. Le taux de croissance de la masse monétaire, choisi par l'État, doit donc lui aussi nécessairement rester constant : $\mu_t = \mu$.

Jusque-là, ce taux n'a aucun effet sur les variables réelles de long terme, mais il influence le taux d'inflation ($d\mu = d\pi$). Il reste à savoir si l'encaisse réelle est dépendante ou non du taux de croissance de la masse monétaire. Pour cela, notons que la condition du premier ordre relative à cette encaisse s'écrit

$$u_m(c, m) = \lambda_t \exp(\theta t)(\pi + n + \theta). \tag{7.18}$$

Dans cette équation, on a vu que c est indépendant de μ. Par contre, le taux d'inflation dépend du taux de croissance de la masse monétaire (de même que l'utilité marginale $\lambda_t \exp(\theta t)$ constante de la consommation). Aussi, en général, l'encaisse réelle de long terme m dépendra-t-elle de μ.

Quelle devrait-être la politique monétaire de l'État ? À long terme, si la monnaie influence le bien-être du ménage et que l'État cherche à maximiser le bien-être social, il devrait choisir un taux de croissance constant μ de la masse monétaire qui maximise le bien-être de long terme du ménage,

$$\int_0^{+\infty} u(c_t, m_t) \exp(-\theta t)\, dt = \frac{u(c, m)}{\theta},$$

sous la contrainte de réalisabilité (7.14). Le coût marginal d'émission de monnaie étant nul, il faudra choisir une encaisse réelle de long terme telle que l'utilité marginale de la monnaie $u_m(c, m)$ soit nulle. La condition du premier ordre (7.18) implique immédiatement qu'alors $n - \theta = -\pi$. Comme $f'(k) = n - \theta$ à la règle d'or modifiée, le rendement marginal du capital doit être égal au taux de déflation :

$$f'(k^*) = -\pi. \tag{7.19}$$

On reconnaît la règle de Friedman. Le taux de croissance de la masse monétaire correspondant est $\mu = \pi + n = \theta - n + n = \theta$. C'est le taux de croissance qui égalise le rendement réel du capital et celui de la monnaie.

3. MONNAIE ET EFFICACITÉ DYNAMIQUE

Les résultats de la section 2 suggère que l'introduction de la monnaie peut restaurer l'efficacité dynamique de l'économie à long terme (si le taux d'intérêt réel est inférieur au taux de croissance de la population), mais nous n'avons pas explicitement décrit la technologie permettant de transférer la richesse réelle d'une période sur l'autre et rapportant cet intérêt. En outre, ce n'est pas parce qu'il existe un équilibre monétaire Pareto optimal que l'économie doit spontanément l'atteindre. Cette section suggère que l'équilibre monétaire est fragile, au sens où une seule trajectoire converge vers lui à long terme, alors qu'une infinité de trajectoires convergent vers l'équilibre sans monnaie de Diamond. Ce seront les anticipations des ménages qui détermineront si la monnaie sera détenue dans le long terme.

3.1. Monnaie et capital

Reprenons le modèle à générations imbriquées de Diamond (1965), et supposons qu'initialement les vieux sont maintenant dotés de $\bar{M}$ unités de monnaie. On mêle donc le modèle de Samuelson (1958), vu dans la section 2, et celui de Diamond (1965) du chapitre 3. Un ménage de la génération t fait face aux deux contraintes suivantes :

$$c_{1t} + s_t + m_t \leqslant w_t$$

et

$$c_{2t+1} \leqslant (1 + r_{t+1}) s_t + \frac{m_t}{1 + \pi_{t+1}}.$$

Ici, s_t représente l'épargne réelle sous forme de capital. Si $k_0 > 0$ (et si l'offre de monnaie n'est pas nulle, $\bar{M} > 0$), les agents doivent demander les deux actifs à l'équilibre. Cela impose que leurs rendements réels soient égaux :

$$(1 + \pi_{t+1})(1 + r_{t+1}) = 1. \tag{7.20}$$

On reconnaît là une version de la règle de Friedman ; pour π_{t+1} et r_{t+1} suffisamment petit, la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage entre la monnaie et le capital devient $r_{t+1} \simeq -\pi_{t+1}$.

3.2. La monnaie et la règle d'or

L'équilibre sur le marché de la monnaie à la date t s'écrit $p_t N_t m_t = \bar{M}$. L'offre de monnaie restant constante, on en déduit la dynamique des encaisses réelles à l'équilibre :

$$p_t N_t m_t = p_{t+1} N_{t+1} m_{t+1} \Leftrightarrow m_t = (1 + \pi_{t+1})(1 + n) m_{t+1}.$$

En utilisant la condition de non-arbitrage entre les deux actifs, et les conditions du premier ordre de l'entreprise, cette égalité devient

$$(1+n)\, m_{t+1} = (1 + r(k_{t+1}))\, m_t. \tag{7.21}$$

En outre, à l'équilibre, l'offre de capital est égale à la demande de capital :

$$s(r(k_{t+1}), w(k_t)) - m_t = (1+n)k_{t+1}, \tag{7.22}$$

La fonction $s(\cdot)$ représente l'épargne réelle totale $s_t + m_t$ choisie par le ménage[1]. Un équilibre est une suite $(k_t, m_t, t \geqslant 0)$ associée à k_0 donné et satisfaisant (7.21) et (7.22) pour tout t, $t \geqslant 0$.Tout se passe comme si, à la date t, k_t étant donné, les ménages anticipaient m_{t+1} (c'est-à-dire le prix de demain, puisque $\bar{M}$ est connue en t), et choisissaient k_{t+1} et m_t.

Un équilibre stationnaire est un couple (k, m) tel que

$$s(r(k), w(k)) - m = (1+n)k$$

et

$$m = \frac{1 + r(k)}{1+n} m.$$

Si $m = 0$, alors le stock de capital correspond à l'équilibre de Diamond du chapitre 3 ; on le notera k^d, $k^d > 0$ (on ne considère pas la situation stationnaire où le stock par tête est nul, qui reste solution si $m = 0$). Si $m \neq 0$, on doit avoir $r(k) = n$, ce qui implique que $k = k_{\text{or}}$. L'équilibre monétaire, s'il existe, est bien dynamiquement efficace. La quantité réelle de monnaie correspondante est

$$m_{\text{or}} = s(r(k_{\text{or}}), w(k_{\text{or}})) - (1+n)k_{\text{or}} = \phi(k_{\text{or}}).$$

On a $\phi(0) = 0$, $\phi(k) < 0$ pour $k \to \infty$ (le taux d'intérêt tend vers 0 et la production, et par là-même le salaire, sont bornés supérieurement, de sorte que l'épargne réelle l'est aussi). Si k est petit, le taux d'intérêt réel est arbitrairement grand et l'on a en principe $\phi(k) > 0$; dans la figure 2, on a pris ϕ croissante puis décroissante en guise d'illustration, mais tel n'est pas nécessairement le cas. Pour que k_{or} soit un équilibre stationnaire monétaire, on doit avoir $m_{\text{or}} = \phi(k_{\text{or}}) > 0$. Dans le cas retenu dans la figure 2, cette condition est satisfaite si et seulement si $k_{\text{or}} < k^d$, c'est-à-dire si et seulement si l'équilibre stationnaire de Diamond est dynamiquement inefficace ($n = r(k_{\text{or}}) > r(k^d)$).

On retrouve donc ici le résultat énoncé dans la Remarque 2 : si l'équilibre de Diamond est dynamiquement inefficace, il existe un équilibre monétaire qui le domine au sens de Pareto, et l'on sait maintenant que cet équilibre correspond à la règle d'or d'accumulation du capital ; sinon, il n'existe pas d'équilibre monétaire.

1. Les propriétés de la fonction $s(\cdot)$ sont donc celles décrites dans le chapitre 3.

3.3. La fragilité de l'équilibre monétaire

Supposons que l'équilibre stationnaire de Diamond soit dynamiquement inefficace. Initialement, le stock de capital est fixé à un certain niveau $k_0 > 0$. Peut-on admettre que l'équilibre monétaire est plus vraisemblable que l'équilibre de Diamond ? Le diagramme des phases va nous renseigner sur ce point. Pour $s_r > 0$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial k_{t+1}}\left(s(r(k_{t+1}),\cdot) - (1+n)k_{t+1}\right) = s_r r' - (1+n) < 0,$$

puisque $r' < 0$. Il s'ensuit que :

$$k_{t+1} < k_t$$
$$\Leftrightarrow s(r(k_{t+1}), w(k_t)) - (1+n)k_{t+1} = m_t > s(r(k_t), w(k_t)) - (1+n)k_t = \phi(k_t).$$

En outre :

$$m_{t+1} > m_t \Leftrightarrow r(k_{t+1}) > n \Leftrightarrow k_{t+1} < k_{\text{or}}.$$

Le diagramme des phases représenté dans la figure 2 s'ensuit. On constate que l'équilibre (stationnaire) monétaire est un point-selle : il existe une unique trajectoire convergeant vers $(k_{\text{or}}, \phi(k_{\text{or}}))$. Mais il existe une infinité de trajectoires convergeant vers l'équilibre non monétaire de Diamond.

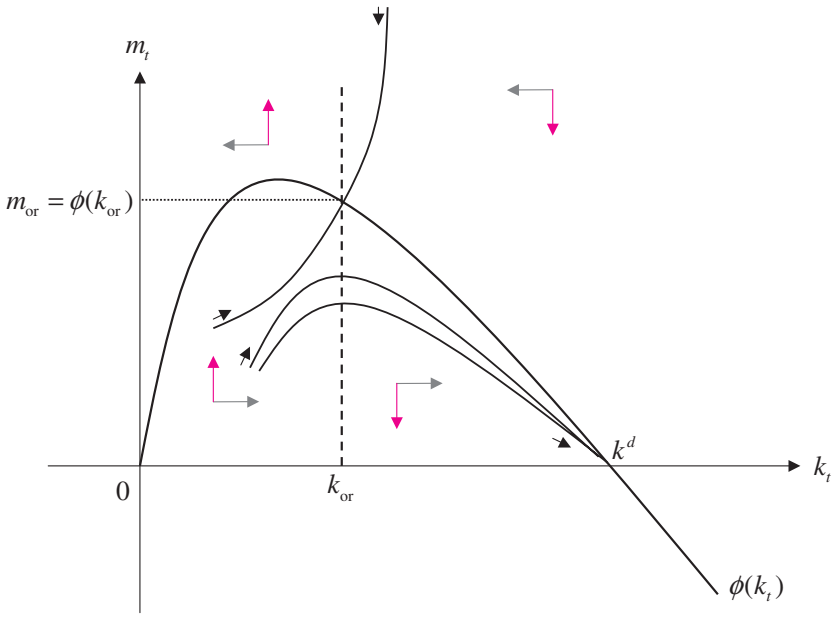


FIGURE 2
Équilibre monétaire

Ce sont les anticipations initiales des ménages qui détermineront la trajectoire effective de l'économie. Si les anticipations sont compatibles avec une encaisse réelle faible initialement, la monnaie n'est plus utilisée asymptotiquement. Une

interprétation possible est que la faible confiance dans la valeur de la monnaie conduit finalement à la disparition de la monnaie. Si les anticipations sont juste compatibles avec la trajectoire point-selle, l'équilibre monétaire sera atteint à long terme[1]. Si elles sont trop élevées, le stock de capital finit par s'annuler, il n'y a plus de production, plus de revenu et ainsi l'encaisse réelle doit s'annuler, ce qui contredit la croissance de m_t pour $k_t < k_{or}$ et montre qu'il n'existe pas d'équilibre.

4. LE SEIGNEURIAGE

Puisque la monnaie permet d'acheter des biens, et que le pouvoir d'émission de la monnaie est en général réservé à la puissance publique, on peut se demander s'il existe des limites au financement monétaire de la dépense publique. Une telle question n'est plus aujourd'hui pertinente pour la France puisqu'elle a perdu le pouvoir d'émettre de la monnaie à sa discrétion. Par contre, elle reste pertinente pour la plupart des économies en-dehors de l'UE. Le financement monétaire des déficits est régulièrement mis en cause, au moins depuis Cagan (1956), lorsque l'on observe une hyperinflation, c'est-à-dire une dynamique explosive des taux d'inflation. Le tableau 1, tiré du manuel de Blanchard et Cohen (2002), illustre ce point pour les épisodes célèbres d'hyperinflation qui ont suivi la Grande Guerre.

Pays	Début	Fin	P_T/P_O	Taux d'inflation mensuel moyen	Croissance mensuel moyenne de la masse monétaire
Autriche	Oct. 1921	Août 1922	70	47	31
Allemagne	Août 1922	Nov. 1923	$1{,}0 \times 10^{10}$	322	314
Grèce	Nov. 1943	Nov. 1944	$4{,}7 \times 10^{6}$	355	220
Hongrie I	Mars 1923	Fév. 1924	44	46	33
Hongrie II	Août 1945	Juil. 1946	$3{,}8 \times 10^{27}$	19 800	12 200
Pologne	Janv. 1923	Janv. 1924	699	82	72
Russie	Déc. 1921	Janv. 1924	$1{,}2 \times 10^{5}$	27	49

P_T/P_O : indice des prix le dernier mois de l'hyperinflation divisé par l'indice des prix le premier mois.
Source : Philip CAGAN, « The Monetary Dynamics of Hyperinflation », éd. Milton Friedman, Studies in the Quantity Theory of Money, Chicago, Ubiversity of Chicago, 1956, Tableau 1.

TABLEAU 1
Quelques épisodes d'hyperinflation

L'État, à la suite d'un choc important (une guerre, une révolution, un renversement), se voit refuser l'accès au crédit, peut difficilement lever des impôts, et doit finalement financer ses dépenses en émettant de la monnaie. L'inflation qui en découle provoque toutefois une baisse des encaisses réelles, qui constitue l'assiette implicite du prélèvement effectué par l'État. Il semble donc raisonnable de penser qu'il existe un volume maximal de biens que l'État peut financer en émettant de la monnaie.

1. Cf. chapitre 9 pour le rôle joué par l'hypothèse de perfection des anticipations.

4.1. La taxe inflationniste

Reprenons le modèle à générations imbriquées avec monnaie mais sans production de Samuelson de la section 2. On prendra $n = 0$ pour simplifier, et on normalise la taille de chaque génération à 1. L'épargne réelle d'un ménage en t anticipant parfaitement le taux d'inflation π_{t+1} est donnée par (7.7) :

$$m_t = m(1+\pi_{t+1}, e). \tag{7.23}$$

Rappelons qu'une unité de bien en t s'échange contre p_t unités de monnaie en t et permet de consommer p_t/p_{t+1} biens en $t+1$. Ainsi, $p_t/p_{t+1}-1$ apparaît comme un taux de rendement réel de l'actif monétaire. Lorsque $p_{t+1} > p_t$, ce taux de rendement devient négatif. L'inflation agit alors comme une taxe sur le pouvoir d'achat de la monnaie, et l'on parle de taxe inflationniste.

Cette taxe est égale au nombre de biens que l'on perd du fait de l'inflation : en l'absence d'inflation, l'encaisse réelle m_t détenue en t impliquerait un revenu égal à m_t en $t+1$. En présence d'inflation, chaque bien détenu en t sous forme d'encaisses réelles s'échange contre $p_t/p_{t+1} = 1/(1+\pi_{t+1})$ biens en $t+1$. L'agent a donc perdu $1-1/(1+\pi_{t+1}) = \pi_{t+1}/(1+\pi_{t+1})$ biens par bien détenu sous forme d'encaisses réelles, et donc au total

$$\frac{\pi_{t+1}}{1+\pi_{t+1}} m_t.$$

On peut lire ce produit comme le revenu d'une taxe : le rapport $\pi_{t+1}/(1+\pi_{t+1})$ serait un taux de taxe fictif et m_t l'assiette de ce prélèvement. C'est la *taxe inflationniste*.

4.2. Le seigneuriage

Qui touche le produit de cette taxe ? Pour répondre à cette question, supposons que l'État émet la monnaie en suivant la règle

$$\bar{M}_t = (1+\mu)\bar{M}_{t-1}. \tag{7.24}$$

Cette règle stipule que le taux de croissance de la monnaie est constant, égal à μ.

La monnaie émise permet d'acheter des biens

$$p_t G_t = \bar{M}_t - \bar{M}_{t-1}. \tag{7.25}$$

La quantité de biens G_t est appelée le *seigneuriage*. Cette demande de biens s'adresse aux jeunes agents, qui récupèrent donc le supplément de monnaie.

En utilisant la loi de Walras, nous pouvons définir un équilibre comme une situation dans laquelle le marché de la monnaie est équilibré à chaque date, c'est-à-dire (7.23) est satisfaite pour tout t pour $m_t = \bar{M}_t/p_t$,

$$m_t = m(1+\pi_{t+1}, e),$$

et en utilisant (7.24),

$$m_t = \frac{1+\mu}{1+\pi_t} m_{t-1}. \tag{7.26}$$

Considérons un équilibre stationnaire où $m > 0$. L'équation (7.26) implique que le taux de croissance de la masse monétaire est égal au taux d'inflation ($\mu = \pi$). Il s'ensuit que le seigneuriage est

$$G_t = \frac{\bar{M}_t}{p_t} - \frac{p_{t-1}}{p_t}\frac{\bar{M}_{t-1}}{p_{t-1}} = \frac{\mu}{1+\mu} m\left(1+\mu, e\right).$$

Le seigneuriage est donc constant. Il est en fait égal au produit du taux de taxe inflationniste et de la base de cette taxe, l'encaisse réelle détenue ; soit, à la taxe inflationniste elle-même. C'est donc l'émetteur de monnaie qui récupère la taxe inflationniste, au travers des biens achetés avec la monnaie émise.

Le point important pour l'État est que le seigneuriage dépend à long terme du taux de croissance de la masse monétaire qu'il contrôle. Une hausse du taux de croissance de la masse monétaire a deux effets : d'une part, il conduit à une inflation plus importante qui accroît la taxe sur les encaisses réelles et, d'autre part, il réduit le taux de rendement réel de la monnaie et ainsi l'encaisse monétaire qui l'on souhaite détenir (la base de la taxe), si l'effet de substitution est dominant. Ces deux effets s'opposent : les ménages voient leurs encaisses plus lourdement taxées mais ils réduisent leurs encaisses.

Formellement, pour $\mu = 0$, le seigneuriage est nul, puisque le taux de taxe inflationniste $\mu/(1+\mu)$ est nul. Pour μ suffisamment grand, le taux de rendement réel de la monnaie devient égal à -1 (une unité de bien en t s'échange contre 0 bien en $t+1$), et donc $m = 0$. Si l'on se place dans une configuration de Samuelson (où les jeunes souhaitent épargner), on a $G \geqslant 0$. Le seigneuriage doit donc atteindre un maximum pour un taux de croissance de la masse monétaire strictement positif et fini.

Pour ce taux, on a :

$$\frac{dG}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} = -\left(1+\mu\right)\frac{m'\left(1+\mu, e\right)}{m\left(1+\mu, e\right)} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_m\left(1+\mu, e\right).$$

L'élasticité $\varepsilon_m\left(1+\mu, e\right)$ de l'épargne au facteur d'inflation est égal à l'inverse du taux de croissance de la masse monétaire. C'est la *règle d'Auernheimer*. Elle correspond au maximum de la courbe de Laffer. L'intuition est évidente, analogue à la politique de tarification d'un monopole : lorsque l'épargne est peu sensible à l'inflation, on devra imposer un taux de croissance de la masse monétaire élevé pour maximiser le seigneuriage ; sinon, la demande de monnaie devenant très sensible au taux d'inflation, l'État ne pourra pas faire croître la masse monétaire à rythme très élevé.

Remarque 7.5

Le modèle précédent montre que l'inflation se stabilise, éventuellement à un niveau élevé si l'État maximise le seigneuriage et si la demande de monnaie est peu sensible à l'inflation. Il ne rend donc pas compte de l'hyperinflation. Cagan (1956) a remarqué que, dans les épisodes d'hyperinflation des années 20, d'une part le taux de croissance de la masse monétaire augmente au cours du temps, et d'autre part qu'il devient supérieur à celui qui maximiserait le seigneuriage. Ce point est illustré dans le tableau 2, lui aussi tiré de Blanchard et Cohen (2002).

	Taux de croissance optimal de la masse monétaire (%)	Seigneuriage maximal (% de la production)	Taux de croissance effectif de la masse monétaire
Autriche	12	13	31
Allemagne	20	14	314
Grèce	28	11	220
Hongrie I	12	19	33
Hongrie II	32	6	12 200
Pologne	54	4,6	2
Russie	39	0,5	49

Taux de croissance de la masse monétaire en pourcentage.
Source : Philip CAGAN, « The Monetary Dynamics of Hyperinflation », dans *Studies in the Quantity Theory of Money,* Milton Friedman (éd.), Chicago, Ubiversity of Chicago Press, 1956,

TABLEAU 2
Croissance de la monnaie et seigneuriage

Cagan en rend compte en supposant que les anticipations sont formées à partir de l'histoire passée de l'économie (cf. chapitre 9). Aussi, à chaque date, l'État fait face à une demande d'encaisses donnée, et peut donc financer n'importe quel volume de seigneuriage en choisissant le taux de taxe inflationniste adéquat. Constatant que l'inflation est plus élevée, les ménages réviseront leurs anticipations d'inflation à la hausse et réduiront leurs encaisses réelles lors de la période suivante. L'État devra, pour maintenir le seigneuriage, augmenter à nouveau le taux de croissance de la masse monétaire. L'inflation est alors susceptible d'exploser au cours du temps.

5. ANNEXE

5.1. Seigneuriage au xv^{e} siècle en France

Sussman (1993) s'est intéressé au financement de la guerre de cent ans, notamment sur la période 1412-1419 durant laquelle la France est partagée entre les Armagnacs et les Bourguignons. Les Bourguignons, après la défaite d'Azincourt (1415), finissent par l'emporter, et le dauphin (le futur Charles VII) est obligé de quitter Paris. Il ne contrôle plus que quelques régions, dans l'est, le centre et le sud-est de la France. Il se réfugie dans le duché de Berry, à Bourges, en 1418.

À cette époque, selon le dicton médiéval, le roi doit vivre de ses propres revenus, c'est-à-dire essentiellement de ses droits seigneuriaux. Les recettes correspondantes ne sont pas perçues continûment ; la perception se fait chaque année (la plupart des loyers sont versés après la récolte), voire parfois tous les trois ans (pour les droits de douane, par exemple, qui sont affermés). En outre, il est difficile pour le dauphin de lever des impôts (il doit pour cela obtenir l'accord d'assemblées régionales) et sa faible crédibilité le gêne pour emprunter. Aussi, pour financer la guerre contre les Anglais de Henri V, le dauphin est contraint de recourir au seigneuriage.

À cette époque, la monnaie renferme des métaux précieux et, pour cette raison, est dotée d'une valeur intrinsèque, contrairement à la monnaie papier, dont le coût marginal d'émission est pratiquement nul, qui a été utilisée dans les années 1920 par les pays vaincus et dans certains pays d'Amérique latine ou centrale dans les années 1980 ou 1990 (cf. Blanchard et Cohen (2002), chapitre 21).

Le pouvoir d'émission de monnaie royale était détenu à l'époque par des artisans privés étroitement contrôlés par le roi. Les pièces étaient composées d'un alliage de cuivre et d'un métal précieux, disons l'argent. Un *marc parisis* (environ 245 grammes) d'alliage donnait N pièces de valeur faciale V (des *deniers tournois* dans le tableau 3). Chaque pièce avait une teneur f (pour *finesse*) en argent. Ainsi, un marc d'argent permettait de produire $1/f$ marc d'alliage, et ainsi NV/f deniers tournois (c'est la valeur d'un marc d'argent en deniers). Mais, une part s de cette somme revenait au roi, de sorte que le prix d'un marc d'argent était finalement $(1-s)NV/f$, le roi collectant un seigneuriage de sNV/f deniers sur chaque marc d'argent converti.

Pour connaître le seigneuriage total, nous avons besoin de savoir combien de marcs d'argent sont convertis. L'offre d'argent (le métal) a deux origines : la conversion par les particuliers de métaux précieux ou des pièces existantes qu'ils possèdent. C'est la célèbre loi de Gresham qui joue dans le dernier cas. Si la finesse d'une pièce de V deniers est égale à f' et que chacune de ces pièces pèse $1/N'$ marcs, chaque pièce contient f'/N' marcs d'argent et permet donc d'obtenir en contrepartie

$$\frac{f'}{N'}\frac{(1-s)NV}{f} = \frac{N}{N'}\frac{f'}{f}(1-s)V$$

SILVER COIN STRUCK AT ROMANS, 1400-1422

Date	*F* Percentage of Fineness	*N* Number of Coins	*L* Mint Par (in *livres*)	*Q* Mint Price (in *livres*)	*S* Mint Charges Rate (%)	Brassage Rate (%)	Seignorage Rate (%)
			Blanc of 10 *Deniers Tournois*				
30 Mar. 1412	45.8	74.25	6.75	6.25	7.4	6.5	0.9
26 Apr. 1412-14 Sept. 1412	41.7	80.00	8.00	6.75	15.6	6.0	9.5
24 Sept. 1412-23 June 1415	41.7	80.00	8.00	7.00	12.5	6.0	6.5
28 June 1415-12 June 1417	41.7	80.00	8.00	7.10	11.3	6.0	5.3
22 June 1417-17 Feb. 1418	33.3	80.00	10.00	8.00	20.0	6.0	14.0
26 Feb. 1418-16 Oct. 1418	22.2	80.00	15.00	9.00	40.0	6.0	34.0
12 Nov 1418-1 Feb. 1419	22.2	80.00	15.00	9.50	36.7	6.0	30.7
21 Jan. 1419	22.2	80.00	15.00	10.00	33.3	6.0	27.3
1 Feb. 1419-14 Apr. 1419	22.2	80.00	15.00	11.00	26.7	6.0	20.7
19 May 1419-24 June 1419	19.8	81.00	18.00	13.00	27.8	5.9	21.9

TABLEAU 3
Émission de monnaie à Romans (1400 : 1422)

deniers. Si ce nombre est supérieur à V, la conversion devrait avoir lieu : la mauvaise monnaie (plus légère et/ou celle de finesse plus faible) chasse la bonne ! Au total, on admettra que la quantité d'argent offerte est égale à

$$B\left(\frac{(1-s)NV}{f}\right),$$

où $B(\cdot)$ est une fonction croissante (cf. Sussman et Zeira (2003) pour une microfondation de l'offre agrégée de monnaie). Le seigneuriage s'élève finalement à

$$sB\left((1-s)\frac{NV}{f}\right)$$

marcs d'argent.

Le roi peut donc influencer le seigneuriage au travers de la taxe s qu'il prélève, mais aussi en réduisant la finesse de chaque pièce, son poids $(1/N)$ ou sa valeur faciale. Seule cette dernière opération est claire pour les utilisateurs de monnaie (dès lors que le poids n'est pas trop modifié). Comme le montre le tableau 3, le roi a utilisé les deux premiers moyens entre 1412 et 1419.

Le taux de taxe s a été multiplié par 3, la finesse de chaque pièce a été réduite de plus de 60 % (elle est passée de 45,8 % en 1412 à 18,8 % en 1419), le nombre de pièces a augmenté, mais plus légèrement, de sorte que le rapport $L = NV/f$ a beaucoup augmenté (*mint par*), et avec lui le prix $Q = (1-s)L$ d'un marc d'argent (*mint price*).

Qui paye cette taxe ? De prime abord, ce sont les marchands qui viennent convertir les métaux ou les pièces qu'ils détiennent. En même temps, la plupart des contrats étaient nominaux ; en particulier, les contrats de fermage. On peut donc penser qu'une partie de la noblesse a souffert de l'inflation (tel a été le cas selon Sussman) ; pour conclure, une anecdote : les travailleurs salariés employés par l'artisan battant la monnaie royale ont réclamé (et obtenu) une indexation de leur rémunération sur le prix de l'argent dès 1419 !

6. EXERCICES ET PROBLÈMES

6.1. Seigneuriage, inflation et hyperinflation

L'émission de monnaie est une source de revenus potentielle pour l'État, que l'on nomme seigneuriage. Dans les pays industrialisés à faible inflation, cela ne représente qu'une faible proportion de leurs ressources. À l'inverse, pour des États se trouvant dans l'incapacité à lever des impôts ou à emprunter, la création monétaire peut s'avérer être la seule source de financement. L'objet de cet exercice est, d'une part, de déterminer dans quelle mesure un gouvernement peut financer ses dépenses par le seigneuriage et, d'autre part, d'en étudier les conséquences en termes d'inflation.

On considère une économie en temps continu constituée d'un bien de prix P_t. L'inflation est égale à $\pi_t = \dot{P}_t/P_t$, où la notation $\dot{P}_t$ signifie dP_t/dt. La Banque centrale

contrôle l'offre de monnaie M_t, et on note $\mu_t = \dot{M}_t/M_t$ le taux de croissance de la masse monétaire.

L'économie est peuplée d'agents ayant une demande de monnaie agrégée

$$L_t = P_t \cdot l(\pi_t), \qquad l'(.) < 0.$$

1. Commentez la forme de la demande de monnaie. Comment qualifier les anticipations d'inflation formulées par les agents ?
2. On pose pour la suite
$$l(\pi) = l_0 e^{-b\pi}, \qquad b > 0.$$
L'État finance un niveau exogène de dépenses publiques réelles g en frappant de la monnaie. Les revenus nominaux du seigneuriage sont égaux par définition à
$$S_t = \dot{M}_t.$$
Écrivez les revenus réels du seigneuriage $s_t = S_t/P_t$ en fonction du taux de création monétaire et de la quantité d'encaisses réelles $m_t = M_t/P_t$, puis en fonction de l'inflation, de la quantité d'encaisses réelles et de sa dérivée par rapport au temps.
3. On considère dans un premier temps les états stationnaires de l'économie : les taux de croissance sont constants au cours du temps.
Quelle relation lie l'inflation au taux de création monétaire à l'équilibre stationnaire ? Pourquoi parle-t-on de taxe inflationniste ? Montrez qu'il existe un niveau maximal $g_{\max}$ de dépenses publiques que l'État peut financer. Commentez.
Vérifiez que lorsque $g < g_{\max}$, il existe deux taux de création monétaire permettant de financer les dépenses publiques. Étudiez l'impact sur l'inflation d'une hausse de g dans chacun des cas.
4. Easterly, Mauro et Schmidt-Hebbel (1992) estiment, sur un panel de 11 pays à forte inflation entre 1960 et 1990, une équation économétrique de la forme
$$\ln\left(\frac{L}{PIB}\right) = cste - b\pi + \varepsilon,$$
où π est l'inflation annuelle. Ils trouvent $b \approx 0,8$.
Déduisez-en le taux d'inflation qui maximise les revenus du seigneuriage. Discutez.
5. On s'intéresse maintenant aux dynamiques non stationnaires de l'économie et on suppose que le gouvernement cherche à financer un niveau constant de dépenses publiques $g > 0$. L'inflation peut-elle diverger vers $+\infty$?
6. Ce modèle très simple montre que l'État peut avoir intérêt à faire de l'inflation, éventuellement beaucoup, pour générer des revenus. Il est généralement estimé que les revenus du seigneuriage sont maximisés avec une inflation d'une

dizaine de pourcents. En revanche, nous ne savons pas pour l'instant expliquer les situations d'hyperinflation, au chapitre desquelles l'inflation atteint des niveaux bien plus élevés qu'une dizaine de pourcents (322 % mensuel entre août 1922 et novembre 1923 en Allemagne, 19 800% pour la Hongrie entre août 1945 et juillet 1946, 182 % au mois de février 1985 en Bolivie, etc.), et durant lesquelles l'inflation croît au cours du temps (les prix augmentent de façon exponentielle).

Nous allons expliquer ce phénomène par le fait qu'il est difficile d'ajuster sa détention d'encaisses réelles. Formellement, nous supposons que la demande d'encaisses réelles effective $\tilde{l}_t$ évolue selon l'équation suivante :

$$\frac{d(\ln(\tilde{l}_t))}{dt} = \beta[\ln(l_t) - \ln(\tilde{l}_t)],$$

où $l_t = l(\pi_t)$ est la demande d'encaisses réelles « idéale ». Interprétee le coefficient β, quel est son signe ? On supposera par la suite que $\beta < 1/b$. Montrez que le gouvernement peut financer n'importe quel montant de dépenses publiques. Expliquez le phénomène.

7. Montrez que lorsque le gouvernement finance un montant g de dépenses publiques en émettant de la monnaie, alors :

$$\frac{\dot{m}_t}{m_t} = \frac{\beta}{1-b\beta}\frac{b}{m_t}\left[\frac{ln(l_0) - ln(m_t)}{b}m_t - g\right].$$

Déduisez-en que $g_{\max}$ est le niveau maximal de seigneuriage à l'équilibre stationnaire.

8. Que se passe-t-il si $g > g_{\max}$? Expliquez le phénomène menant à l'hyperinflation.

Éléments de correction

1. La demande de monnaie dépend de sa valeur anticipée pour demain, la demande d'encaisses réelles L_t/P_t est donc une fonction de l'inflation anticipée. Les agents veulent d'autant moins détenir de monnaie qu'elle a peu de valeur dans le futur, i.e., que l'inflation anticipée est forte : $l'(.) < 0$. On a supposé que les anticipations étaient rationnelles : l'inflation anticipée est égale à l'inflation réalisée. Par ailleurs, on a écrit la demande de monnaie indépendamment du revenu ; la raison est que l'on cherche à étudier des situations dans lesquelles les prix varient rapidement, en particulier beaucoup plus rapidement que les grandeurs réelles de l'économie que l'on considère donc comme constantes.

2.
$$s_t = \frac{S_t}{P_t} = \frac{\dot{M}_t}{P_t} = \frac{\dot{M}_t}{M_t}\frac{M_t}{P_t} = \mu_t m_t$$
$$s_t = \frac{S_t}{P_t} = \frac{\dot{M}_t}{P_t} = \frac{\dot{m}_t P_t + m_t \dot{P}_t}{P_t} = \dot{m}_t + m_t \pi_t$$

3. $\dot{m}_t = 0$ implique qu'ils sont égaux :

$$\mu = \pi.$$

On retrouve le message que l'inflation est un phénomène monétaire, i.e., causée par la création monétaire. La croissance monétaire entraîne de l'inflation, qui ampute le pouvoir d'achat de la monnaie et agit donc comme une taxe sur les détenteurs de monnaie. L'équilibre sur le marché de la monnaie implique :

$$s = m\mu = l(\pi)\mu = l(\pi)\pi.$$

$l(.)$ est une fonction exponentielle donc $s(.)$ est une courbe de Laffer : en cloche. Un taux de taxe inflationniste nul ne rapporte aucun revenu, un taux de taxe infini réduit à néant la base fiscale, et entre les deux se trouve l'optimum. Elle atteint donc son maximum pour un certain $\mu_{\max}$ et $g_{\max} = s(\mu_{\max})$.
Étant donné $g < g_{\max}$, il existe donc deux niveaux de création monétaire (i.e., deux niveaux d'inflation) $\mu_1 < \mu_{\max}$ et $\mu_2 > \mu_{\max}$ tels que $s(\mu) = g$. Dans le premier cas, une hausse des dépenses publiques augmente l'inflation, dans le second, elle la réduit.

4. Le taux d'inflation qui maximise les revenus dans un état stationnaire est

$$\operatorname{argmax} \pi e^{-b\pi} = -\frac{1}{b} \approx 125\ \%.$$

En essayant d'autres fonctions de demande de monnaie, ces auteurs trouvent qu'elle est plutôt de la forme $l(\pi) = l_0 e^{-b\pi^c}$, avec $b \approx 0,9$ et $c \approx 2,2$, d'où un taux d'inflation qui maximise les revenus du seigneuriage de l'ordre de 70 %. $c > 1$ signifie que l'augmentation de l'inflation décourage d'autant plus la détention de monnaie que l'inflation est déjà initialement élevée, ce qui réduit les possibilités de seigneuriage avec une inflation élevée.
Ce modèle ne tient pas non plus compte des coûts d'une forte inflation. Les prix changent très rapidement, les salaires doivent être renégociés souvent... Cela tend également à réduire les bénéfices de l'inflation.

5. En différentiant l'équation d'équilibre sur le marché de la monnaie $m_t = l(\pi_t)$ par rapport au temps, et en utilisant l'expression du seigneuriage $s_t = \dot{m}_t + m_t\pi_t$, on obtient

$$\dot{\pi}_t = \frac{\pi_t l(\pi_t) - g}{-l'(\pi_t)},$$

qui est négatif lorsque π_t est suffisamment grand. L'inflation ne peut pas diverger vers $+\infty$.

6. Lorsque la demande $\tilde{l}_t$ est inférieure à la demande idéale l_t, alors la demande augmente : $\beta > 0$. Plus β est grand, plus l'ajustement est rapide. $\beta = +\infty$ correspond au cas précédent : $\tilde{l}_t = l_t$.
Les revenus du seigneuriage sont $s_t = \mu_t m_t$, où μ_t est la variable de choix de la Banque centrale. Or $m_t = \tilde{l}_t$ est maintenant une variable continue car sa dérivée est finie (ce qui n'était pas le cas dans la première partie de l'exercice car on

avait $\beta = +\infty$ et m_t pouvait « sauter »). Par conséquent, en choisissant un taux de création monétaire suffisamment grand, on peut financer n'importe quel montant de dépenses publiques à un instant donné. La raison est que les agents n'ajustent pas instantanément à la baisse leur demande d'encaisses réelles, l'inflation s'ajuste donc avec un délai et les revenus de la création de monnaie ne sont pas amputés par l'augmentation des prix.

7. Le seigneuriage est égal à $g = s_t = \dot{m}_t + m_t\pi_t$, donc :

$$\pi_t = \frac{g - \dot{m}_t}{m_t}.$$

En substituant $m_t = \tilde{l}_t$ dans l'équation d'évolution de la demande de monnaie, on a :

$$\frac{\dot{m}_t}{m_t} = \beta[\ln(l_0) - b\pi_t - \ln(m_t)],$$

et, en réinjectant l'expression de π_t, on obtient :

$$\frac{\dot{m}_t}{m_t} = \frac{\beta}{1 - b\beta}\frac{b}{m_t}\left[\frac{ln(l_0) - ln(m_t)}{b}m_t - g\right].$$

À l'état stationnaire, $\dot{m}_t = 0$ et $m_t = \tilde{l}_t = l_t = l(\pi_t)$. Donc le seigneuriage vaut :

$$s_t = \dot{m}_t + m_t\pi_t = l(\pi_t)\pi_t.$$

Il ne peut pas dépasser $g_{\max}$ dans un état stationnaire.

8. L'étude de la fonction de m_t,

$$\frac{ln(l_0) - ln(m_t)}{b}m_t,$$

montre que son maximum est égal à $g_{\max}$. Par conséquent, si $g > g_{\max}$, alors le terme entre crochets est négatif et $\dot{m}_t < 0$: m_t décroît au cours du temps. Or la quantité d'encaisses réelles est une grandeur positive, donc m_t tend vers une limite supérieure ou égale à 0. Supposons par l'absurde que m_t tende en $t \to +\infty$ vers une limite strictement positive, on aurait par ailleurs que $\dot{m}_t$ tendrait vers 0. Mais alors, on convergerait vers un état stationnaire, auquel on sait qu'un niveau $g > g_{\max}$ de dépenses publiques ne peut pas être financé, d'où la contradiction. On en déduit que m_t tend vers 0. Or le seigneuriage $g = \dot{m}_t + m_t\pi_t$ doit être maintenu constant et $\dot{m}_t < 0$, la seule solution est donc que l'inflation tende vers $+\infty$. De plus, en utilisant l'expression établie à la question 7, on obtient que $\dot{m}_t$ tend vers $-gb\beta/(1 - b\beta)$ qui est une constante strictement négative. Par conséquent, c'est en un temps fini que m_t tend vers 0 et que l'inflation diverge.

Le mécanisme est le suivant : les ajustements de la demande d'encaisses réelles et donc des prix ne sont pas instantanés, donc le gouvernement peut générer beaucoup de revenus à court terme en émettant de la monnaie. Mais ensuite la

demande de monnaie s'ajuste à la baisse, ce qui augmente les prix. Pour continuer à atteindre le même niveau de seigneuriage en termes réels, le gouvernement doit augmenter le taux de croissance de la monnaie. Au final, la masse monétaire et les prix croissent exponentiellement (et même encore plus vite puisque les prix divergent en temps fini).

7. REPÈRES BIBLIOGRAPHIQUES

La plupart des points abordés dans ce chapitre sont traités dans Blanchard et Fischer (1989), sections 4.1, 4.5 et 10.2. Le seigneuriage avec anticipations adaptatives est décrit à la section 4.7. Blanchard et Cohen (2002) donnent des exemples d'hyperinflation dans le chapitre 21 ; les Tableaux 1 et 2 sont tirés de ce manuel. Tous ces thèmes sont repris à un niveau plus avancé dans Walsh (2003), chapitres 2, 3 et section 4.4 ; la figure 1 est extraite de ce manuel. Voir enfin Stockman (1981) pour le modèle de croissance avec contrainte de liquidité.

CHAPITRE 8

Cohérence de la politique économique

1. INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous avons examiné le cas d'agents devant à un instant donné choisir comment ils devront se comporter dans le futur. Nous avons alors implicitement supposé que les décisions qu'ils projetaient de prendre à cet instant coïncideraient avec celles qu'ils prendraient le moment venu. Par exemple, le ménage devant choisir sa consommation et son épargne à un instant donné, disons en $t = 0$, doit en même temps déterminer le montant de sa consommation future. Lorsque les choix de ce ménage sont ceux qui maximisent son bien-être, on ne voit pas vraiment de raison qui pourrait faire que l'agent modifiera en chapitre de route son comportement et optera en faveur de trajectoires de consommation et d'épargne qui lui procurent un bien-être moindre, lorsque la trajectoire est évaluée depuis la période initiale. Si tel était le cas, le ménage devrait initialement le prendre en compte et déterminer son comportement courant en conséquence. Doit-on se comporter en t comme on avait prévu de le faire initialement ? On peut bien sûr répondre négativement dans de nombreux cas, par exemple si notre environnement subit un changement imprévu ou s'il nous révèle une information que nous ne connaissions pas initialement. Cependant, jusqu'ici les agents ont été supposés anticiper correctement le futur. À chaque instant, ils connaissent donc exactement l'environnement dans lequel ils se trouveront plus tard. Doit-on pour autant en conclure que, dans ces circonstances, les décisions que l'on prévoit de prendre, celles qui maximisent notre bien-être, seront effectivement mises en œuvre ? Que notre comportement sera cohérent au cours du temps ? Qu'il n'est pas rationnel de revenir sur une décision prise ? La réponse est claire : elle est négative.

Comme l'ont illustré pour la première fois Kydland et Prescott (1977), il est possible qu'un même agent ne soit pas cohérent dans ses choix au cours du temps, même s'il

est rationnel. L'intuition est en fait très simple : lorsqu'un agent, disons une Banque centrale, *annonce* la politique qu'elle compte mener lors des périodes suivantes, elle influence, si son annonce est (au moins partiellement) *crédible*, les anticipations que forment les agents du secteur privé, et ainsi les décisions qui sont prises lors de la période courante. Cependant, une fois ces décisions prises, il n'est plus possible de les remettre en cause (elles appartiennent à l'histoire de l'économie). Elles seront alors insensibles aux politiques économiques qui seront *effectivement* mises en œuvre lors des périodes suivantes. Aussi, en général, les décisions qui sont optimales à une date donnée ne sont pas celles que l'on prévoyait (optimalement) de prendre dans le passé.

Exemple 8.1

Un exemple célèbre est celui de l'euthanasie des rentiers que préconisait Keynes. Il est optimal de promettre de verser un intérêt aux agents pour les inciter à épargner, ce qui accroît l'investissement et relance l'activité. Mais une fois cette épargne accumulée, il n'est pas possible de la détruire, et donc il n'est pas nécessaire de payer les intérêts. On pourrait donc se débarrasser de tous les gens qui vivent des rentes de leur épargne passée. □

Exemple 8.2

Le dilemme des brevets sur les inventions : tout brevet protège l'inventeur et lui donne un pouvoir de monopole qui augmente son profit et l'incite à innover, cette innovation étant bénéfique pour la société. Cependant, une fois l'invention réalisée, la présence d'un monopole réduit le surplus social et est donc néfaste pour la société dans son ensemble. □

Exemple 8.3

La littérature nous donne de nombreux exemples de ce comportement. Décrivons par exemple le cas d'Ulysse face aux sirènes. La magicienne Circé annonce à Ulysse qu'il va devoir passer à proximité de l'île des sirènes, que ces dernières vont le séduire et le mettre à mort. Avant de faire face aux sirènes, Ulysse préfère résister aux charmes mortels des sirènes et se fait enchaîner au mât de son bateau par ses marins (auxquels il a enduit les oreilles de cire). Cependant, une fois en présence des sirènes, il supplie ses marins de le libérer car il préfère maintenant aller à la rencontre des sirènes et mourir. Ulysse prévoit donc qu'il voudra céder aux sirènes, ce qu'il ne souhaite pas avant de les rencontrer. Il trouve une solution : il utilise une technologie qui l'empêche d'agir à sa guise au cours du temps. Il se contraint de lui-même. Elster (1986) exploite cette histoire pour discuter la rationalité individuelle : quel est finalement l'Ulysse rationnel ? Est-ce celui qui anticipe succomber aux sirènes et ne le souhaite pas ? Est-ce celui qui face aux sirènes ferait tout pour les rejoindre ?

L'*Odyssée* est riche d'exemples analogues, entre autres l'épisode des Lotophages dans le chant VIII et surtout celui des vaches du soleil dans le chant XII. Dans les deux cas, Ulysse et ses marins savent qu'ils ne doivent pas effectuer un acte quelconque (manger une fleur ou une vache du soleil), qu'ils risquent la mort s'ils transgressent l'interdit, préfèrent et s'engagent à ne pas le transgresser, mais finissent par le faire, une fois au contact des fleurs ou des vaches. □

L'objectif de ce chapitre est de poser le problème de l'incohérence temporelle et de décrire les principales pistes qui ont été proposées pour le résoudre. Ce thème a été extrêmement populaire dans les années 1980, et abondamment appliqué à la politique monétaire, au point d'influencer certaines des règles auxquelles sont soumises les Banques centrales aujourd'hui. Ces solutions sont bien résumées par J. Stiglitz : « Dans la plupart des pays, j'ai bien dit la plupart et pas tous les pays, les choses ont été faites de telle sorte que la Banque centrale indépendante se voit donner un mandat pour servir un certain groupe d'intérêts. Il s'agit d'une sorte de verrouillage, soit par constitution, soit par traité. On cadenasse certaines politiques économiques pour servir les intérêts de quelques groupes au détriment d'autres.

Quelques exemples pour illustrer mes propos. D'abord la question du mandat. En Europe, la Banque centrale européenne a mission de mettre l'accent sur la lutte contre l'inflation. Mais c'est un mandat assez étrange. La lutte contre l'inflation ne constitue pas une fin en soi, elle n'est qu'un moyen pour aller vers une croissance économique plus stable, moins stable, une meilleure ou une plus mauvaise répartition des richesses, mais, en tant que telle, l'inflation ne doit pas constituer un objectif à part entière.

Aux États-Unis, notre Banque centrale, la Fed, a pour mission de s'intéresser à l'inflation, mais aussi au chômage et à la croissance. »

2. UNE PREMIÈRE INTUITION

Supposons que la fonction de bien-être social soit

$$S(x_1, x_2, \pi_1, \pi_2), \tag{8.1}$$

où x_t $(t = 1,2)$ représente une décision prise par les agents lors de la période t, et π_t la politique économique menée par l'autorité centrale.

Supposons en outre que la décision des agents à la date $t = 1$ dépende de la suite des politiques économiques envisagées, soit

$$x_1 = X_1(\pi_1, \pi_2). \tag{8.2}$$

Par exemple, les ménages décident de consommer dès aujourd'hui (x_1) parce que le gouvernement annonce qu'il baissera les impôts demain (π_2). La décision prise en $t = 1$ influence celle qui est prise en $t = 2$, étant données les politiques du gouvernement, soit

$$x_2 = X_2(x_1, \pi_1, \pi_2). \tag{8.3}$$

Définition 8.1

Une politique optimale (avec engagement) est une paire (π_1^*, π_2^*) *qui maximise* (8.1) *sous les contraintes* (8.2) *et* (8.3).

L'autorité centrale va choisir sa politique (π_1, π_2) en prenant en compte la réaction du secteur privé telle qu'elle est décrite par (8.2) et (8.3). Ainsi, en $t = 1$, on peut écrire

(8.1) de la façon suivante :

$$S(X_1(\pi_1,\pi_2),X_2(X_1(\pi_1,\pi_2),\pi_1,\pi_2),\pi_1,\pi_2), \tag{8.4}$$

et le problème de l'autorité est de maximiser (8.4) par rapport à π_1 et π_2. Les conditions du premier ordre sont

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_1}(\pi_1^*,\pi_2^*) = \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial \pi_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial \pi_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial \pi_1} + \frac{\partial S}{\partial \pi_1} = 0 \tag{8.5}$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_2}(\pi_1^*,\pi_2^*) = \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial \pi_2} + \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial \pi_2} + \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial \pi_2} + \frac{\partial S}{\partial \pi_2} = 0. \tag{8.6}$$

Imaginons maintenant que π_1^* ait été choisie lors de la première période et considérons l'autorité centrale en début de seconde période, alors que $x_1^* = X_1(\pi_1^*,\pi_2^*)$ est maintenant donné. L'autorité va-t-elle à nouveau opter pour π_2^* ? Pour le savoir, remarquons que l'autorité va donc choisir la politique π_2^{**} qui maximise

$$S(x_1^*,X_2(x_1^*,\pi_1^*,\pi_2),\pi_1^*,\pi_2).$$

Cette politique coïncide-t-elle avec π_2^* ? La politique choisie effectivement en $t=2$ satisfait la condition du premier ordre

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_2}(\pi_1^*,\pi_2^{**}) = \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial \pi_2} + \frac{\partial S}{\partial \pi_2} = 0. \tag{8.7}$$

En comparant (8.6) et (8.7), on constate que π_2^* et π_2^{**} sont deux politiques différentes en général. Elles ne coïncideront en effet que dans le cas particulier où

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial X_1}{\partial \pi_2} = 0,$$

ce qui arrive notamment si la décision que prennent les agents lors de la première période n'est pas influencée par la politique que l'autorité annonce mettre en œuvre au chapitre de la seconde période.

En fait, lorsque le gouvernement choisit initialement sa politique, il prend en compte les répercussions de son choix (de son annonce) sur la décision des agents. Une fois que les agents ont cru en la véracité de son annonce de politique économique, et ont pris leurs décisions, ils ne peuvent pas revenir en arrière. Cette décision est donnée, irrévocable. L'autorité centrale, lorsqu'elle choisit sa politique de deuxième période, ne prend donc plus en compte son effet sur les décisions passées, ce qui l'incite en général à modifier sa politique par rapport à celle qui était optimale lors de la première période (π_2^*).

Une politique (π_1^{**},π_2^{**}) est temporellement cohérente si le gouvernement a intérêt à la respecter à chaque date. Dans notre exemple, à la date $t=2$, la politique π_1^{**} étant fixée, on doit avoir

$$\pi_2^{**} = \arg\max_{\pi_2} S(X_1(\pi_1^{**},\pi_2^{**}),X_2(x_1^{**},\pi_1^{**},\pi_2),\pi_1^{**},\pi_2). \tag{8.8}$$

À la date $t = 1$,

$$\pi_1^{**} = \arg\max_{\pi_1} S(X_1(\pi_1, \pi_2^{**}), X_2(X_1(\pi_1, \pi_2^{**}), \pi_1, \pi_2^{**}), \pi_1, \pi_2^{**}). \tag{8.9}$$

Définition 8.2

Une politique temporellement cohérente est une paire (π_1^{**}, π_2^{**}) *solution de (8.8) et (8.9).*

Par conséquent, une autorité centrale cherchant à maximiser le bien-être de la société peut être amenée, si elle est libre d'agir comme elle l'entend à chaque date, à prendre des décisions au cours du temps qui ne sont pas, en un certain sens, les meilleures pour la société.

3. UNE APPLICATION À LA POLITIQUE MONÉTAIRE

La crédibilité de la politique économique a été longuement illustrée dans un cadre très simple, présenté à titre d'exemple dans Kydland et Prescott (1977), et repris ensuite par Barro et Gordon (1983). Dans cet exemple, l'État, représenté par une Banque centrale contrôlant le taux d'inflation, fait face aux salariés du secteur privé, et l'économie se résume quant à elle à une courbe de Phillips augmentée.

3.1. La courbe de Phillips

Cette section est un bref rappel des débats qui ont eu lieu autour de la relation entre l'inflation et le chômage (cf. Blanchard et Cohen (2003), chapitre 9, pour une présentation plus approfondie). C'est ce cadre qui constitue la toile de fond à de nombreuses illustrations du concept de crédibilité d'une autorité en charge de la politique monétaire. La relation entre l'inflation et le chômage était une ligne de partage très nette entre les classiques et les keynésiens dans les années 1950. Pour les classiques, le marché du travail est équilibré à chaque instant : le chômage doit rester nul, les salaires s'ajustant en réponse aux chocs affectant les fonctions d'offre et de demande de travail. À l'optimum de l'entreprise, le salaire réel est égal à la productivité marginale du travail. Aussi, le taux de croissance des salaires est égal au taux d'inflation augmenté du taux de croissance de la productivité marginale du travail. Pour les keynésiens, au contraire, tant que l'économie n'est pas au plein-emploi, le prix du travail et celui des biens doivent rester fixés.

Pour les classiques, le chômage doit rester nul et l'inflation s'ajuste ; pour les keynésiens, l'inflation reste nulle (en négligeant la croissance de la productivité du travail) tant qu'il y a du chômage. L'étude de Phillips (1958) a permis de trancher : elle valide plutôt la théorie keynésienne, puisque le chômage est négativement lié à l'inflation, mais elle montre que l'inflation devient positive bien avant que le chômage soit complètement résorbé, de sorte que l'analyse de court terme du modèle IS-LM perd une partie de sa pertinence (lorsque le chômage est faible).

Cette relation a été exploitée dans les années 1960 ; les États ont consenti des hausses de l'inflation pour obtenir une baisse du chômage. Mais elle a brusquement

disparu au début des années 1970, une forte inflation coexistant avec un chômage élevé. On connaît l'explication qu'a donnée Milton Friedman de ce phénomène : l'inflation forte des années 1960 a conduit le secteur privé à réviser ses anticipations d'inflation à la hausse, et ce changement a provoqué un déplacement de la courbe de Phillips.

À la date t, les salariés anticipent le niveau général des prix pour la période à venir, P_t^e et obtiennent un salaire nominal $W_t = P_t^e G(u_t)$, où u est le taux de chômage et $G' < 0$. La fonction G représente le pouvoir de négociation des salariés. Il est plus faible lorsque le chômage est important. Une fois le salaire nominal fixé, les entreprises choisissent le prix effectif P_t en appliquant une marge constante sur les salaires : $P_t = (1+\mu)W_t$.

Au total,

$$P_t = (1+\mu)P_t^e G(u_t).$$

Soit $\bar{u}$ le taux de chômage naturel (obtenu lorsque $P_t = P_t^e$) : $G(\bar{u}) = 1/(1+\mu)$. En divisant par P_{t-1} chacun des deux membres, on obtient :

$$\frac{1+\pi_t}{1+\pi_t^e} = \frac{G(u_t)}{G(\bar{u})}$$

À court terme, une hausse de la production s'accompagne d'une hausse de l'emploi et d'une baisse du taux de chômage. Soit $G(u_t) = F(y_t)$, et $G(\bar{u}) = F(\bar{y})$. Alors, pour π_t et π_t^e suffisamment petits, et pour y_t proche de $\bar{y}$, on a :

$$\pi_t - \pi_t^e = \frac{F'(\bar{y})}{F(y_t)}(y_t - \bar{y}).$$

C'est la version de la courbe de Phillips (augmentée) que nous utiliserons plus bas (avec F'/F constant). Elle met en évidence que la relance de l'activité au-dessus de son niveau naturel doit passer par une sous-estimation de l'inflation de la part des du secteur privé.

3.2. La cohérence temporelle de la politique monétaire

3.2.1. Le cadre

L'objectif de la Banque centrale est de choisir un taux d'inflation π et un niveau du produit agrégé y qui maximisent le bien-être de la société, représentée par la fonction

$$S(\pi, y) = 2(y - \bar{y}) - \pi^2. \tag{8.10}$$

Le bien-être sociale est donc d'autant plus élevé que son produit est grand (que l'emploi est grand) et que son taux d'inflation (ou de déflation) est proche de 0. La Banque cherche donc à relancer l'activité réelle en minimisant les modifications du niveau général des prix. L'inflation a des coûts, par exemple parce qu'elle réduit le bien-être en taxant les encaisses réelles des ménages ou parce qu'elle implique une confusion entre les mouvements des prix relatifs et du niveau général des prix ; cela peut justifier que l'on cherche à stabiliser le niveau général des prix (à annuler l'inflation).

Les salariés qui lui font face doivent choisir le taux d'inflation π^e qu'ils anticipent et cherchent à minimiser leur erreur d'anticipation

$$(\pi - \pi^e)^2. \tag{8.11}$$

Dans l'interprétation que donne Friedman de la courbe de Phillips, les salariés doivent négocier leur salaire nominal avant de connaître le niveau général des prix, qu'ils doivent donc anticiper. Leur objectif est de maintenir constant un certain pouvoir d'achat. Ils doivent ainsi anticiper correctement le prix des biens ; étant donné le niveau des prix précédents qu'ils observent, ceci équivaut à anticiper correctement le taux d'inflation.

Le produit agrégé, l'inflation effective et l'inflation anticipée sont liés par une courbe de Phillips augmentée

$$y = \bar{y} + (\pi - \pi^e). \tag{8.12}$$

Nous supposerons que les évènements se déroulent de la façon suivante. Il y a une seule période, décomposée en deux sous-périodes.

1. D'abord, la Banque centrale annonce un taux d'inflation qu'elle réalisera et les salariés du secteur privé forment leurs anticipations d'inflation étant donnée cette annonce.
2. Ensuite, la Banque décide du taux d'inflation qu'elle souhaite imposer effectivement.

3.2.2. La solution avec engagement

Supposons tout d'abord que la Banque soit contrainte de mettre en œuvre la politique qu'elle a annoncée. De façon équivalente, la Banque doit choisir le taux d'inflation dès la première sous-période. Elle le fait en prenant en compte que les salariés vont anticiper le taux qu'elle va annoncer et mettre en œuvre en seconde sous-période. Soit π le taux d'inflation annoncé et réalisé. Le programme de la Banque centrale est de choisir (y, π) qui maximise (8.10) sous les deux contraintes (8.12) et $\pi^e = \pi$, puisque les salariés savent que la Banque doit respecter son annonce. Soit, en réintroduisant (8.12) dans l'objectif (8.10),

$$\max_{\pi} S(\pi, \pi^e) = 2(\pi - \pi^e) - \pi^2 \tag{8.13}$$

sous la contrainte

$$\pi^e = \pi.$$

On retrouve bien dans (8.13) la tension entre le désir de relancer l'activité, qui passe par une sous-estimation du taux d'inflation par les salariés, et celui de minimiser la variabilité des prix. Dans la solution avec engagement, toutefois, il n'est pas possible d'obtenir une production différente de la production naturelle (puisque les agents

anticipent le taux qui va se réaliser et qui leur a été annoncé par la Banque préalablement), de sorte que l'inflation choisie est $\pi^* = 0$, et le bien-être social correspondant $S^* = 0$.

Supposons maintenant que la Banque ne soit pas contrainte de respecter son annonce. Est-elle incitée à la respecter ? Si elle annonce $\pi = \pi^* = 0$ et qu'elle est crue, $\pi^e = \pi^* = 0$, alors, au moment où elle doit choisir effectivement sa politique, elle résout le problème suivant :

$$\max_{\pi} S(\pi, \pi^e) = 2(\pi - \pi^e) - \pi^2$$

sous la contrainte

$$\pi^e = 0.$$

Elle est donc incitée à choisir $\pi^{**} = 1 > \pi^* = 0$. Le bien-être de la Banque est égal à 1 ; il est supérieur à 0. La Banque n'est donc pas incitée à respecter son engagement. Elle est incitée à tromper le secteur privé en fixant une inflation plus élevée que celle qui a été anticipée pour obtenir une relance de l'activité : pour $\pi = 1$ et $\pi^e = 0$, la courbe de Phillips donne $y = \bar{y} + 1 > \bar{y}$, de sorte que le produit est supérieur à son niveau naturel.

3.2.3. La solution cohérente

Si la Banque n'est pas contrainte de mettre en œuvre la politique annoncée, il n'y a aucune raison pour que les salariés croient *a priori* son annonce. Dans cette configuration, en fait, sa politique d'annonce est vaine : les salariés vont chercher à anticiper le taux d'inflation effectif en prenant en compte l'incitation de la Banque à les tromper.

Pour résoudre ce problème, nous allons commencer par décrire le comportement qu'aura la Banque en seconde sous-période, une fois que les salariés auront formé leurs anticipations (elles seront donc considérées comme données par la Banque à ce moment-là). À l'étape 2, la Banque choisit donc le taux d'inflation π maximisant (8.13) en considérant la stratégie π^e du secteur privé comme donnée. Il s'ensuit que :

$$-2\pi + 2 = 0 \Leftrightarrow \pi = \pi^{**} = 1.$$

Le secteur privé, en première sous-période, lorsqu'il doit choisir le taux d'inflation qu'il va anticiper, anticipe le comportement de la Banque. Il sait ici que la Banque va fixer $\pi^{**} = 1$ indépendamment de sa propre anticipation. Le secteur privé choisit donc π^e minimisant (8.11) en considérant la stratégie d'inflation précédente :

$$\pi^e = \pi^{**}.$$

Dans cet exemple rudimentaire, la Banque a une stratégie dominante : elle choisit π^{**} indépendamment de π^e. Le secteur privé en réponse choisit $\pi^e = \pi^{**} = 1$. Le bien-être social est maintenant $S^{**} = -1 < S^* = 0$.

Le manque de crédibilité de l'annonce de la Banque (c'est-à-dire, l'incapacité de la Banque à convaincre qu'elle respectera son annonce) a donc un effet pervers : il incite

les ménages du secteur privé à fixer des anticipations d'inflation si élevées qu'elles dissuadent la Banque de les tromper. La relance se ferait alors au prix d'une inflation trop coûteuse pour la société. À l'équilibre (temporellement cohérent), les salariés ont des anticipations d'inflation exactes, mais élevées, et le produit se trouve à son niveau naturel.

3.3. Règles de politique économique

La façon la plus naturelle de résoudre le problème de cohérence temporelle auquel les autorités sont soumises est d'ordre institutionnel. Elle consiste à imposer des limites aux décisions qui peuvent être prises. La règle des k % de taux de croissance de la masse monétaire défendue par Milton Friedman est un exemple célèbre d'une telle contrainte (si le taux de croissance de la masse monétaire est égal au taux d'inflation – cf. chapitre 6, alors cette règle revient à fixer le taux d'inflation).

Mais les contraintes imposées portent le plus souvent sur le taux d'inflation : ainsi, la Banque du Canada doit viser une inflation nulle, et la Banque centrale européenne a pour seul objectif la stabilité des prix. Ces règles sont annoncées publiquement de sorte à influencer les anticipations d'inflation, et limiter ainsi le biais inflationniste.

Deux types de règles sont distingués : les *règles strictes* imposent à la Banque de remplir un certain objectif prédéfini, par exemple l'inflation optimale x^*, et les *règles souples* introduisent des pénalités lorsque la Banque dévie trop de certains objectifs, mais lui laissent une certaine marge de manoeuvre (cf. Walsh (2003), section 8.3.5).

4. CRÉDIBILITÉ ET RÉPUTATION

En dehors des règles, il semble naturel de prendre en compte un souci de réputation de la part de la Banque centrale : si l'on euthanasie les rentiers, il n'est pas sûr qu'autant d'agents décident d'épargner demain !

Dans notre exemple, une Banque centrale peut obtenir $S^* = 0$ indéfiniment si elle respecte son engagement alors qu'elle profite d'une déviation vers une inflation plus importante durant une seule période, où elle obtient un bien-être de 1, et qu'ensuite elle risque de devoir supporter S^{**}, voire un bien-être moindre si elle veut regagner la confiance des salariés (elle doit alors supporter des anticipations d'inflation plus élevées que l'inflation qu'elle met effectivement en oe uvre, et donc un produit inférieur à son niveau naturel – par exemple, elle joue $\pi^* = 0$, mais $\pi^e = \pi^{**} = 1$, de sorte que $S = -2 < -1$). Cependant, les incitations de la Banque dépendent étroitement de la sanction que le modélisateur attribue au secteur privé en cas de déviation.

Une configuration intéressante a été étudiée par Backus et Driffill (1985). Une Banque centrale dont les préférences sont inconnues va chercher à se construire une réputation pour mettre le secteur privé en confiance, même si elle se préoccupe de la relance de l'activité. La Banque centrale va, la plupart du temps, rendre maximal le bien-être de la société en contenant l'inflation, sans qu'il soit nécessaire de lui imposer de se conformer à une règle de politique économique, mais en la laissant plutôt agir à sa guise (de façon discrétionnaire). Il suffit pour cela qu'elle prenne en compte

l'effet de ses décisions sur sa réputation future. Si elle prend en compte la relance de l'activité, elle finira par révéler ses véritables préférences, au moment où le secteur privé la croit résolue à combattre l'inflation.

4.1. Le cadre

On considère un jeu à deux joueurs, toujours une autorité monétaire et le secteur privé, mais cette fois à deux périodes ($t = 1,2$). Les préférences de l'autorité monétaire (la Banque centrale) sont représentées par la fonction d'utilité

$$S(\pi_t, y_t) = b(y_t - \bar{y}) - \pi_t^2, \quad b \geqslant 0, \tag{8.14}$$

où π_t est le taux d'inflation à la date t, y_t est le produit agrégé à cette même date, et $\bar{y}$ est le niveau naturel de la production. Le paramètre b représente le poids relatif accordé par la société à la relance de l'activité ; plus b est élevé, plus la Banque est incitée à tromper le secteur privé, et moins sa politique est crédible.

On imposera que soit respectée la même relation de Phillips que dans la section précédente,

$$y_t = \bar{y} + (\pi_t - \pi_t^e),$$

où π_t^e est le taux d'inflation anticipé par le secteur privé en t. On peut donc réécrire (8.14) sous la forme

$$S(\pi_t, \pi_t^e) = b(\pi_t - \pi_t^e) - \pi_t^2. \tag{8.15}$$

La Banque centrale peut être de deux types. On dira qu'elle est monétariste lorsqu'elle n'est préoccupée dans (8.14) que par le taux d'inflation ($b = 0$), et qu'elle est keynésienne sinon ($b > 0$). Pour simplifier, si la Banque est keynésienne, on fixera $b = 2$.

Initialement (en $t = 1$), la Banque est la seule à connaître son type. Soit p_t la croyance du secteur privé de faire face à une Banque monétariste au début de la période t (ainsi p_1 est une donnée du modèle).

4.2. Le dévoilement de la Banque

Lors de chaque période, la Banque centrale et le secteur privé choisissent respectivement π_t et π_t^e selon la même chronologie que dans la section précédente. Il est clair qu'une Banque centrale monétariste jouera $\pi_t = 0$ quel que soit t et quel que soit π_t^e.

Le problème que nous devons donc étudier est celui d'une Banque centrale keynésienne cherchant à se faire passer pour monétariste (en fixant $\pi_1 = 0$ lors de la première période $t = 1$) dans le but d'inciter le secteur privé à croire que l'inflation sera nulle lors de la prochaine période ($\pi_2^e = 0$ en $t = 2$) pour finalement le tromper en fixant ($\pi_2 > \pi_2^e = 0$) et provoquer une relance $y_2 > \bar{y}$.

À la date $t = 2$, la Banque centrale (keynésienne) fixe

$$\pi_2^* = \arg\max_{\pi_2}(2(\pi_2 - \pi_2^e) - \pi_2^2),$$

en prenant π_2^e comme donnée. Il s'ensuit que $\pi_2^* = 1 > 0$. Ainsi une Banque centrale keynésienne se dévoile toujours lors de la dernière période (car $\pi_2^* = 0$ pour une Banque monétariste). Étant donnée la réputation p_2 (donnée en $t = 2$) de la Banque, le secteur privé anticipe $\pi_2^e = p_2 \times 0 + (1 - p_2) \times 1 = (1 - p_2)$. La probabilité p_2 est la probabilité que le secteur privé attribue à la possibilité que la Banque soit monétariste et joue donc toujours une inflation nulle. Face à cette anticipation d'inflation, le gain de la Banque en $t = 2$ est

$$S(1, (1 - p_2)) = 2p_2 - 1.$$

C'est le fait que le gain augmente avec p_2 qui fournit bien à une Banque keynésienne une incitation à se faire passer pour monétariste. Plus la Banque keynésienne a réussi à convaincre le secteur privé qu'elle est monétariste (p_2 est élevée), plus le secteur privé choisit une anticipation d'inflation contenue, et plus le secteur privé sous-estime l'inflation en seconde période, ce qui implique un effet de relance plus important en $t = 2$.

4.3. Asseoir sa réputation

En $t = 1$, la Banque keynésienne a deux possibilités : soit elle se révèle en choisissant une inflation positive, soit elle décide de faire croire qu'elle est monétariste en choisissant une inflation nulle. Dans le premier cas, $p_2 = 0$.

On s'intéresse donc à la probabilité p_2 choisie par le secteur privé si l'inflation est nulle en première période. Alors, étant donnée p_1, le secteur privé révise sa croyance de façon bayésienne, et l'on a :

$$p_2 \equiv P(m \mid \pi_1 = 0) = \frac{P(m)P(\pi_1 = 0 \mid m)}{P(m)P(\pi_1 = 0 \mid m) + P(k)P(\pi_1 = 0 \mid k)}$$

On a bien sûr $p_1 = P(m)$ (la probabilité de faire face à une Banque monétariste) et $P(\pi_1 = 0 \mid m) = 1$. La probabilité *a priori* p_1 que le secteur attribue au fait que la Banque soit initialement monétariste est une donnée du problème. Soit q_1 la probabilité qu'une Banque keynésienne se déguise effectivement en fixant $\pi_1 = 0$. Alors,

$$p_2 = \frac{p_1}{p_1 + (1 - p_1)q_1}. \tag{8.16}$$

Si le secteur privé croit qu'une Banque keynésienne décide rarement de contenir l'inflation (soit q_1 petit), l'observation d'un taux d'inflation faible l'incite à croire qu'il fait vraisemblablement face à une Banque monétariste (p_2 élevé). Bien sûr, si $q_1 = 1$, il n'y a aucune différence entre les monétaristes et les keynésiens et un taux d'inflation faible n'apprend rien au secteur privé.

C'est la Banque (keynésienne) qui choisit q_1. Cette probabilité dépend des gains qu'elle obtient lorsqu'elle joue $\pi_1 = 0$ et $\pi_1 = 1$.

Si la Banque fixe $\pi_1 = 0$, elle gagne sur les deux périodes

$$(-2\pi_1^e) + (2p_2 - 1), \tag{8.17}$$

où $(-2\pi_1^e)$ est le gain obtenu en première période, obtenu en posant $\pi_1 = 0$ dans (8.15), et $\pi_1^e = (1-p_1)(1-q_1)$. Le secteur privé révise alors p_1 en p_2 selon (8.16) et anticipe $\pi_2^e = (1-p_2)$ défini plus haut, de sorte que le gain de la Banque en $t = 2$ est $(2p_2 - 1)$.

Au contraire, elle gagne simplement

$$(1 - 2\pi_1^e) + (-1) = -2\pi_1^e \tag{8.18}$$

si elle fixe $\pi_1 = 1$.

On peut maintenant déterminer la probabilité q_1 de se faire passer pour monétariste en comparant (8.17) et (8.18). Trois cas peuvent être distingués :

1. La Banque keynésienne fixe $q_1 = 1$ (soit $\pi_1^* = 0$) si $p_2 > 1/2$. En utilisant (8.16), on obtient $p_1 = p_2$. Il s'ensuit que l'on doit avoir $p_1 > 1/2$. Lorsque sa crédibilité initiale est suffisamment grande ($p_1 > 1/2$), c'est-à-dire lorsque le secteur privé croit initialement qu'il a vraisemblablement affaire à une Banque monétariste, la Banque choisit de se déguiser en contenant l'inflation lors de la première période pour mieux tromper le secteur privé en $t = 2$.
2. Si $p_2 = 1/2$ dans (8.17), (8.16) se réécrit :

$$q_1 = \frac{p_1}{1 - p_1}. \tag{8.19}$$

   Alors, pour $p_1 \leqslant 1/2$,
   - Si $p_1 = 1/2$ dans (8.19), alors $q_1 = 1$ et la Banque keynésienne choisit $\pi_1^* = 0$.
   - Si $0 < p_1 < 1/2$ dans (8.19), alors $0 < q_1 < 1$, de sorte que la Banque choisit vraiment au hasard le taux d'inflation qui prévaudra lors de la première période. Si, par chance, elle joue $\pi_1^* = 0$, alors le secteur privé croit qu'elle est monétariste avec la probabilité $p_2 = 1/2$ (obtenue en remplaçant q_1 défini par (8.19) dans (8.16)) et il suit de (8.17) que la Banque gagne juste $(-2\pi_1^e)$. Si, par chance, elle joue $\pi_1^* = 1$, alors elle se révèle comme keynésienne et il suit de (8.17) qu'elle gagne aussi $(-2\pi_1^e)$.
   - Si $p_1 = 0$ dans (8.19), alors $q_1 = 0$ (la Banque se révèle toujours comme étant keynésienne dès la première période) et $p_2 = 0$, ce qui est impossible.
3. Si, finalement, $p_2 < 1/2$ dans (8.17), alors la Banque doit se révéler comme étant keynésienne dès la première période ($q_1 = 0$). Il s'ensuit que $p_2 = 0$. Donc $p_1 = 0$ d'après (8.16).

Au total, tant que sa réputation (d'être monétariste et ainsi de ne pas tromper le secteur privé en augmentant l'inflation) est suffisamment bonne initialement, la Banque centrale choisit une faible inflation (ici nulle) lors des premières périodes, même si cette politique contredit son intérêt de court terme. Ensuite, elle décide de se révéler en trompant le secteur privé pour relancer l'emploi et la production lors des dernières périodes. Elle accepte donc de supporter les coûts initiaux liés aux anticipations d'inflation biaisées à la hausse (en moyenne) du secteur privé pour accroitre son gain

final lorsqu'elle surprendra le secteur privé. Par contre, si sa réputation est initialement trop faible, alors elle joue au hasard, voire se révèle immédiatement comme étant keynésienne[1].

5. DÉLÉGATION ET INDÉPENDANCE

En Europe, alors que la politique budgétaire est encadrée mais laissée sous la responsabilité de chaque État membre, la politique monétaire est décidée par la Banque centrale européenne, qui n'est pas placée sous la dépendance directe d'un État membre particulier. Cette organisation peut être la conséquence du problème de crédibilité auquel ferait face une Banque centrale nationale cherchant à contrôler l'inflation et subissant des pressions politiques pour exploiter la courbe de Phillips pour réduire le chômage (au prix d'une inflation plus forte).

Formellement, les préférences de la Banque ne coïncident pas nécessairement avec celles de la société. Imaginons par exemple que les préférences sociales restent représentées par (8.10) alors que celles de la Banque sont représentées par

$$S_b(\pi, y) = 2(y - \bar{y}) - b\pi^2, \tag{8.20}$$

ou b est éventuellement différent de 1. Si $b > 1$, la Banque est plus monétariste (conservatrice) que la société ; sinon, elle est plus keynésienne.

La section précédente suggère qu'il faudrait plutôt choisir une Banque centrale plus conservatrice que la société elle-même pour que la solution avec engagement soit mise en œuvre. En utilisant la courbe de Phillips, les préférences de la Banque deviennent :

$$S_b(\pi, \pi^e) = 2(\pi - \pi^e) - b\pi^2. \tag{8.21}$$

Une fois π^e fixée, la Banque choisit $\pi^{***} = 1/b$, et le bien-être de la société, évalué par (8.13), est simplement $S^{***} = -(1/b)^2$ (puisque $\pi^e = \pi^{***}$ à l'équilibre cohérent). En choisissant b suffisamment grand, on fait tendre S^{***} vers $S^* = 0$, et l'on retrouve la politique optimale (avec engagement). En d'autres termes, même si les préférences de la société dépendent de l'emploi, il est optimal pour elle de choisir une Banque centrale qui ne prend en compte que l'inflation.

5.1. Stabiliser l'activité

Ce résultat est modifié lorsque la Banque et la société souhaitent stabiliser la production. Pour le voir, supposons que les préférences de la société et de la Banque centrale soient toutes les deux représentées par la fonction objectif

$$S(\pi, y) = -\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{b}{2}(y - (\bar{y} + k))^2, \tag{8.22}$$

1. L'équilibre construit dans cette section est un équilibre bayésien séquentiel.

où k est une production choisie (et donnée) par le gouvernement. Le premier terme, comme dans les sections précédentes, montre que la société éprouve de l'aversion pour l'inflation ou la déflation et cherche à stabiliser le niveau général des prix. Le deuxième terme est nouveau. Il reflète le désir de stabiliser la production à un niveau supérieur (pour $k \geqslant 0$) au produit naturel. Il traduit donc à la fois un désir de relance de l'activité et une aversion pour l'instabilité de la production.

Pour que le produit soit fluctuant en l'absence de politique économique, la courbe de Phillips est modifiée de la façon suivante :

$$y = \bar{y} + (\pi - \pi^e) + \varepsilon, \tag{8.23}$$

où ε est un bruit tel que $E(\varepsilon) = 0$ et $V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) = \sigma_\varepsilon^2 > 0$.

On supposera que :

1. le secteur privé forme ses anticipations d'inflation π^e ;
2. l'aléa ε se réalise ;
3. enfin, la Banque centrale choisit (π, y).

En d'autres termes, au moment où la Banque met en œuvre sa politique (le taux d'inflation effectif), elle connaît la réalisation de l'aléa. Le secteur privé doit quant à lui former son anticipation d'inflation avant que l'aléa se réalise.

5.2. La solution cohérente

Étant donnée l'anticipation π_t^e du secteur privé, et étant donné l'aléa ε réalisé, la Banque choisit un niveau d'inflation et d'activité qui maximisent (8.22) sous la contrainte (8.23). En remplaçant $y - \bar{y}$ dans (8.22) par son expression, tirée de la courbe de Phillips (8.23), l'inflation choisie satisfait la condition du premier ordre :

$$\pi(\varepsilon) + b(\pi(\varepsilon) - \pi^e + \varepsilon - k) = 0. \tag{8.24}$$

Cette condition du premier ordre se lit comme donnant l'inflation choisie par la Banque en fonction des anticipations du secteur privé : contrairement au cas simple examiné plus haut, la Banque n'a plus maintenant une stratégie dominante qui lui ferait fixer l'inflation indépendamment de la croyance du secteur privé.

Les salariés choisissent de leur côté π^e qui minimise

$$E_\varepsilon(\pi(\varepsilon) - \pi^e)^2,$$

puisqu'ils ne connaissent pas encore la réalisation de l'aléa mais prennent en compte la politique $\pi = (\pi(\varepsilon), \varepsilon)$ de la Banque, telle que définie par (8.24). Soit :

$$\pi^e = E_\varepsilon(\pi(\varepsilon)).$$

Puisque (8.24) est vraie pour tout ε, on a :

$$E_\varepsilon\pi(\varepsilon) + b(E_\varepsilon\pi(\varepsilon) - E_\varepsilon\pi(\varepsilon) - k) = 0 \Leftrightarrow E_\varepsilon\pi(\varepsilon) = bk.$$

Et donc, finalement,

$$\pi^{**}(\varepsilon) = bk - \frac{b}{1+b}\varepsilon \quad \text{pour tout } \varepsilon. \tag{8.25}$$

En outre,

$$y^{**}(\varepsilon) = \bar{y} + \frac{1}{1+b}\varepsilon.$$

$$\Rightarrow V(\pi_t^{**}) = \left(\frac{b}{1+b}\right)^2 \sigma_\varepsilon^2, \quad V(y_t^{**}) = \left(\frac{1}{1+b}\right)^2 \sigma_\varepsilon^2 \tag{8.26}$$

En moyenne, il n'est pas possible d'atteindre la cible que la société s'est fixée en matière d'activité : $Ey_t^{**} = \bar{y} < \bar{y} + k$ (le secteur privé forme des anticipations d'inflation qui sont en moyenne correctes à l'équilibre). Plus k est élevé, plus la Banque va être incitée à faire de l'inflation en moyenne, pour que le secteur privé sous-estime l'inflation, et donc que le produit passe au-dessus de son niveau naturel. En réponse à cette incitation de la Banque, les anticipations d'inflation sont élevées : elles augmentent avec k. Bien sûr, lorsque $b = 0$, la Banque ne se préoccupe plus que de stabiliser les prix : elle choisit toujours une inflation nulle, et c'est ce qu'anticipe le secteur privé.

Bien que la Banque échoue en matière de relance, elle peut stabiliser le produit (réduire sa variance), ceci d'autant plus que b, le poids accordé à la stabilisation de l'activité est important. Mais la formulation de l'objectif est telle que l'on ne peut pas séparer le désir de stabiliser le produit (mesuré par b) de celui de relancer le niveau de la production à $\bar{y} + k$ (lui aussi mesuré par b). La stabilisation de l'activité réelle se fait donc au prix d'une hausse de l'inflation moyenne. Ainsi, une plus grande importance accordée à la stabilisation de l'activité (b élevé) conduit à rendre l'inflation plus volatile : la Banque ajuste le taux d'inflation au grès des chocs ε subis par la production.

5.3. La solution avec engagement

La solution avec engagement s'obtient en supposant que la Banque annonce sa politique, conditionnellement à toutes les réalisations possibles de l'aléa, et respecte son annonce (elle met en place la politique annoncée). Soit $(\pi(\varepsilon), y(\varepsilon))$ la politique annoncée si ε se réalise. La Banque choisit un plan $(\pi, \mathbf{y})$ qui maximise

$$E_\varepsilon\left[-\frac{1}{2}\pi(\varepsilon)^2 - \frac{b}{2}(y(\varepsilon) - (\bar{y}+k))^2\right]$$

sous les contraintes

$$y(\varepsilon) = \bar{y} + (\pi(\varepsilon) - \pi^e) + \varepsilon, \quad \text{pour tout } \varepsilon,$$

et

$$\pi^e = E_\varepsilon \pi(\varepsilon).$$

Elle choisit ainsi un plan d'inflation π qui maximise

$$E_\varepsilon\left[-\frac{1}{2}\pi(\varepsilon)^2 - \frac{b}{2}(\pi(\varepsilon) - E_\varepsilon\pi(\varepsilon) + \varepsilon - k)^2\right]. \tag{8.27}$$

Comme le montre (8.25), la solution cohérente est une fonction linéaire de l'aléa. Supposons que la solution avec engagement le soit aussi. On pose :

$$\pi(\varepsilon) = \alpha + \beta\varepsilon. \tag{8.28}$$

Alors, la Banque doit choisir (α, β) qui maximisent (8.27) sous la contrainte (8.28). Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$E_\varepsilon(\alpha + \beta\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0,$$

$$E_\varepsilon\left[(\alpha - bk)\,\varepsilon + \left(\beta + \beta b + b\right)\varepsilon^2\right] = 0 \Leftrightarrow \left(\beta + \beta b + b\right)\sigma_\varepsilon^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta = -\frac{b}{1+b}.$$

Au total, l'inflation optimale s'écrit :

$$\pi^* = -\frac{b}{1+b}\varepsilon. \tag{8.29}$$

Elle est nulle en moyenne, et elle est ex post contracyclique (lorsque le produit s'élève au-dessus de son niveau naturel, la Banque pratique une déflation qui tend à stabiliser les fluctuations effectives de l'activité), d'autant plus sensible à l'aléa que le poids b accordé à l'objectif de stabilisation de l'activité est élevé.

En comparant (8.25) et (8.29), on retrouve le biais inflationniste bk (la production est identique, puisque l'inflation est anticipée correctement en moyenne). L'inflation est donc trop élevée dans la situation cohérente, causant une perte de bien-être social.

5.4. Délégation de la politique monétaire

En suivant Rogoff (1985), supposons que la Banque accorde un poids $\hat{b}$, éventuellement différent de b (le poids que la société accorde au volet « production » de l'économie), à la stabilisation de l'activité au niveau $\bar{y} + k$. Alors, la solution cohérente est

$$\pi^{**}(\hat{b}) = \hat{b}k - \frac{\hat{b}}{1+\hat{b}}\varepsilon, \quad y^{**}(\hat{b}) = \bar{y} + \frac{1}{1+\hat{b}}\varepsilon \tag{8.30}$$

Le bien-être (ex post) de la société pour cette solution est évalué à partir de (8.22). Il s'écrit :

$$L(b, \hat{b}) = -\frac{1}{2}\left(\hat{b}k - \frac{\hat{b}}{1+\hat{b}}\varepsilon\right)^2 - \frac{b}{2}\left(\frac{1}{1+\hat{b}}\varepsilon - k\right)^2, \tag{8.31}$$

On devrait donc choisir une Banque centrale dont les préférences sont paramétrées par le coefficient $\hat{b}^*$ qui maximise $E_\varepsilon L(b, \hat{b})$. Il est très simple de vérifier que la condition du premier ordre de ce problème définit $\hat{b}^*$ tel que :

$$F(\hat{b}^*) = \hat{b}^* k^2 + \frac{\hat{b}^* - b}{(1+\hat{b}^*)^3}\sigma_\varepsilon^2 = 0 \tag{8.32}$$

On s'intéresse aux solutions $\hat{b}^* \geqslant 0$ de cette équation. Remarquons d'abord que $F(\hat{b}^*) > 0$ si $\hat{b}^* \geqslant b$. Remarquons ensuite que $F(0) = -b\sigma_\varepsilon^2 < 0$. Il s'ensuit que $0 < \hat{b}^* < b$. Ainsi, la Banque centrale que l'on devrait choisir est plus monétariste que la société elle-même ($\hat{b}^* < b$). Elle n'est toutefois pas monétariste ($\hat{b}^* > 0$). En comparant (8.25) et (8.30), on constate que l'inflation moyenne est bien plus faible lorsque la politique est déléguée à une Banque centrale plus monétariste que la société, ce qui nous rapproche de la solution optimale. Cependant, la réduction de l'inflation d'une Banque centrale monétariste augmenterait la volatilité de la production.

Remarque 8.1

Élire le gouverneur de la Banque centrale. Supposons que les préférences de l'électeur i soient caractérisées par le poids relatif qu'il affecte à la stabilisation de la production autour de la cible k, soit

$$U_i(\pi_t, y_t) = -\frac{1}{2}(\pi_t)^2 - \frac{1}{2}b_i(y_t - \bar{y})^2. \tag{8.33}$$

Soit b_i^* le type de Banque centrale que préfère l'électeur i (lui-même étant de caractéristique b_i). Supposons que la désutilité de l'agent i est d'autant plus grande que le type b^* de la Banque centrale qui gère effectivement la politique monétaire est différent de b_i^*. Soit b_m^* le type de Banque centrale que préfère l'électeur médian (de type b_m) : la moitié des électeurs sont tels que $b_i^* < b_m^*$ et préfèrent ainsi une Banque centrale plus conservatrice que celle qui serait choisie par l'électeur médian. Une procédure de vote majoritaire opposant deux alternatives quelconques va conduire au résultat suivant : une majorité d'électeurs préfèrent toujours b_m^* à n'importe quel autre b^*. Si l'on choisit $b^* \neq b_m^*$ alors au moins une moitié des électeurs (les monétaristes si $b^* > b_m^*$ et les keynésiens si $b^* < b_m^*$) seront hostiles au changement de type de Banque centrale. La question est donc de savoir quel est le type de Banque centrale que préfère l'électeur médian. Il sait qu'une Banque centrale de type b résout le programme

$$\min \frac{1}{2}(\pi_t)^2 + \frac{1}{2}b(y_t - (\bar{y} + k))^2 \tag{8.34}$$

$$\text{tel que} \quad y_t = \bar{y} + (\pi_t - \pi_t^e) + \varepsilon_t. \tag{8.35}$$

Comme nous l'avons vu, elle va donc choisir :

$$\pi_t^{**} = bk - \frac{b}{1+b}\varepsilon_t \quad \text{et} \quad y_t = \frac{1}{1+b}\varepsilon_t \tag{8.36}$$

L'électeur médian choisit donc une Banque centrale de type b_m^* tel que :

$$b_m^* = \arg\min_b \frac{1}{2}\left(bk - \frac{b}{1+b}\varepsilon_t\right) + \frac{1}{2}b_m\left(\frac{1}{1+b}\varepsilon_t - (\bar{y} + k)\right)^2 \tag{8.37}$$

Le résultat de Kenneth Rogoff se transpose alors de la façon suivante : l'électeur médian de type b_m préfère une Banque centrale de type b_m^* tel que $b_m^* < b_m$. Ainsi, les électeurs, pour le scrutin majoritaire décrit, vont choisir une Banque centrale plus conservatrice que l'électeur médian.

6. ÉCONOMIE POLITIQUE

6.1. Le cas d'électeurs naïfs

Écartons-nous dans cette section de l'hypothèse d'anticipations exactes. En effet, lorsque des élections ont lieu, certains prétendent que les électeurs accordent une plus grande importance aux évènements récents et ont tendance à oublier ce qui s'est passé auparavant. C'est le parti pris de Nordhaus (1975).

Imaginons qu'un gouvernement soit élu au début de la période $t = 0$ et que son mandat dure T périodes. Son programme est de maximiser

$$\sum_{t=0}^{T} (1+\delta)^t \left(-\frac{1}{2}(\pi_t)^2 + b(y_t - \bar{y}) \right), \tag{8.38}$$

sous les contraintes

$$y_t = \bar{y} + (\pi_t - \pi_t^e) \tag{8.39}$$

$$\text{avec} \quad \pi_t^e = \pi_{t-1} \tag{8.40}$$

Le paramètre $\delta > 0$ implique que le gouvernement accorde d'autant plus d'importance au bien-être des agents que la fin de son mandat approche (par exemple pour augmenter ses chances de réélection). Selon (8.40), les électeurs ont des anticipations naïves. Cette hypothèse est cruciale : intuitivement, elle rend l'inflation coûteuse en début de mandat car elle rend nécessaire une hausse plus importante de l'inflation lors de la période suivante pour relancer l'activité au-dessus de son niveau naturel ; en fin de mandat, cette contrainte disparaît. On devrait donc observer une inflation faible dans un premier temps, ce qui permet d'augmenter l'effet de surprise de la dernière période de mandat, alors que les sanctions (l'anticipation d'une inflation forte lors de la prochaine période) ne feront que pénaliser le gouvernement qui suivra.

Il est clair que cet effet est en partie dû à l'absence de prise en compte de la possibilité d'être réélu. Le programme de maximisation se réécrit :

$$\sum_{t=0}^{T} (1+\delta)^t \left(-\frac{1}{2}(\pi_t)^2 + b(\pi_t - \pi_{t-1}) \right),$$

avec π_{-1} donné. Les conditions du premier ordre sont :

$$\pi_0 = b - b(1+\delta) = -\delta b = \pi_t \quad \text{pour } t \leqslant T-1,$$

et

$$\pi_T = b.$$

Tous les gouvernements vont se comporter de la même manière : il s'ensuit que $\pi_{-1} = \pi_T = b$. Ainsi, en termes d'emploi, nous avons :

$$y_0 = \bar{y} + (-b\delta - b) = \bar{y} - (1+\delta)b \tag{8.41}$$

$$y_t = \bar{y} + (-b\delta - (-b\delta)) = \bar{y} \quad \text{pour } t = 1, \ldots, T-1 \tag{8.42}$$

et

$$y_T = \bar{y} + (b - (-b\delta)) = \bar{y} + (1+\delta)b. \tag{8.43}$$

L'inflation est donc contenue en début de mandat, au prix d'une récession, puis d'une stabilisation de l'emploi à son niveau naturel. Lors de la dernière période, le gouvernement surprend les agents en relançant l'inflation, et ainsi l'activité réelle.

6.2. Le cas d'électeurs rationnels

Il est difficile de croire que le secteur privé ne finira pas par comprendre l'incitation du gouvernement à le tromper en dernière période. Alesina (1987) donne les résultats inverses en supposant qu'il existe une incertitude politique. Il y a maintenant deux types de gouvernement, un monétariste et un keynésien, dont les préférences sont représentées respectivement par

$$S_m(\pi_t, y_t) = -\frac{1}{2}(\pi_t)^2, \tag{8.44}$$

$$S_k(\pi_t, y_t) = -\frac{1}{2}(\pi_t)^2 + b(y_t - \bar{y}), \quad \text{avec } b > 0. \tag{8.45}$$

Les mandats des gouvernements sont supposés durer deux périodes consécutives.

Lors de l'année de l'élection, des sondages sont d'abord publiés. Ils donnent les keynésiens gagnants avec la probabilité p. Ensuite, les élections ont lieu et le parti victorieux met immédiatement en œuvre sa politique préférée.

Ainsi, les monétaristes maximisent (8.44) sous la contrainte (8.39) et imposent immédiatement une politique de contrôle du taux d'inflation $\pi_t^m = 0$ quel que soit π_t^e. Les keynésiens maximisent (8.45) sous la contrainte (8.39) et imposent immédiatement $\pi_t^k = b > 0$ quel que soit π_t^e. Les électeurs anticipent donc

$$\pi_t^e = (1-p) \times 0 + p \times b = pb.$$

Lors de la deuxième année, les électeurs connaissent le résultat de l'élection et anticipent $\pi_t^e = 0$ si le gouvernement est monétariste, et $\pi_t^e = b$ s'il est keynésien. Un gouvernement monétariste joue $\pi_{t+1}^m = 0$ tandis qu'un gouvernement keynésien joue $\pi_{t+1}^k = b$.

Que peut-on en déduire sur le cycle économique résultant de l'élection ? Si le gouvernement élu est keynésien alors la surprise d'inflation $\pi_t^k - \pi_t^e = b - pb > 0$ implique que les agents ont sous-estimé l'inflation, ce qui relance l'activité économique réelle, par la courbe de Phillips. Lors de la deuxième période, par contre, $y_t = \bar{y}$. Au contraire, si le gouvernement élu est monétariste alors la surprise d'inflation $\pi_t^m - \pi_t^e = 0 - pb < 0$ implique que les agents ont sur-estimé l'inflation, ce qui provoque une récession de l'activité économique réelle ($y_t < \bar{y}$). Lors de la deuxième période, on a toujours $y_t = \bar{y}$.

Au total, si un gouvernement keynésien est élu, on doit observer une reprise de l'activité, puis une récession, et une inflation relativement forte. Si un gouvernement monétariste est élu, alors le modèle prédit que l'on doit d'abord observer une récession de l'activité, puis une légère reprise, mais peu d'inflation.

La figure 1 reporte le taux de croissance du PIB en volume et celui de l'indice des prix à la consommation depuis 1960 en France, et marque les années d'élection présidentielle. On constate une très nette rupture de tendance lors de chaque élection.

En général, le taux de croissance des prix à la consommation baisse alors qu'il augmentait à la fin du mandat précédent (sauf en 1965 et 2002), quel que soit le parti vainqueur. Ces mouvements semblent être associés à des épisodes de relance de l'activité en fin de mandat. Ces prédictions plutôt dans le sens du modèle de Nordhaus.

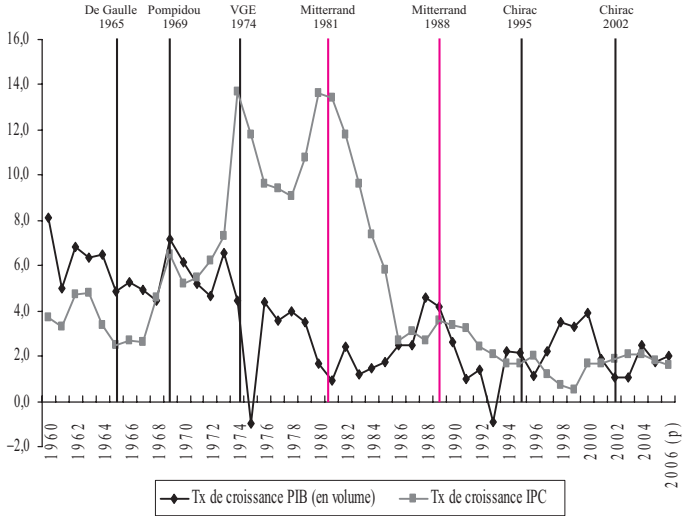


FIGURE 1
Cycles politiques : les élections présidentielles en France

La figure 2 reproduit l'exercice avec les élections législatives. La courbe de Phillips se retrouve dans les années 1960 et 1990 ; dans les années 1970 et 1980, la relation prédite par Phillips ne se retrouve pas vraiment. Les élections législatives sont souvent associées à des ruptures de tendance, sans que l'on puisse systématiquement lier cette histoire au parti politique vainqueur.

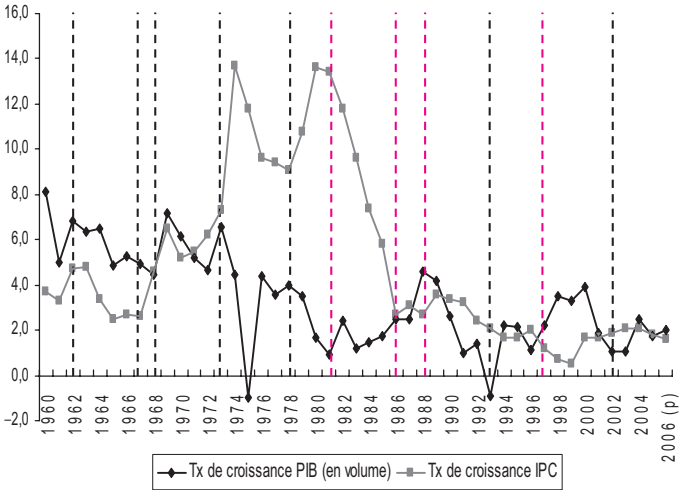


FIGURE 2
Cycles politiques : les élections législatives en France

7. EXERCICES ET PROBLÈMES

7.1. Crédibilité de la politique monétaire

On considère une Banque centrale qui, en agissant sur la masse de monnaie ou le taux d'intérêt, contrôle parfaitement le taux d'inflation π. Avant qu'elle ne fixe le taux d'inflation, les autres agents de l'économie forment des croyances sur le comportement à venir de la Banque centrale et anticipent un taux d'inflation π^a.

Le mandat du banquier central est de minimiser la fonction de perte instantanée

$$l = \frac{a}{2}\pi^2 - b(\pi - \pi^a),$$

avec a et b strictement positifs.

1. Commenter la forme de la fonction de perte.

Dans tout l'exercice, les anticipations d'inflation des agents sont supposées parfaites.

On suppose dans cette question que la politique monétaire suit une règle : les autorités monétaires annoncent à l'avance le taux d'inflation visé, puis les agents forment leurs anticipations, et enfin la Banque centrale fixe le taux annoncé sans pouvoir revenir sur son annonce.

2. Déterminez le niveau optimal d'inflation. Quelle valeur prend la fonction de perte ?

   On suppose maintenant que la politique monétaire est discrétionnaire : la Banque centrale peut annoncer une valeur cible avant que les agents ne forment leurs anticipations, mais rien ne l'empêche de ne pas suivre cette annonce au moment de choisir effectivement le niveau d'inflation.
3. La Banque centrale peut-elle reproduire la situation prévalant sous la règle optimale ?
4. Déterminez la valeur de l'inflation $\widehat{\pi}$ et de la fonction de perte $\widehat{l}$ lorsque la politique est discrétionnaire. Commentez.

   On étend le modèle en considérant un horizon infini. La fonction de perte de la Banque centrale est la somme actualisée des pertes instantanées futures,

$$L = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^t \left[\frac{a}{2}\pi_t^2 - b(\pi_t - \pi_t^a)\right],$$

   où π_t et π_t^a désignent respectivement l'inflation de la période t et sa valeur anticipée à la période précédente, et $\theta > 0$ est le taux d'actualisation.

   On considère la configuration suivante : la Banque centrale annonce une règle sous la forme d'un niveau constant d'inflation $\pi_t = \pi^*$ pour tout $t \geqslant 0$, mais elle ne peut pas se lier les mains et s'engager à suivre cette règle (elle mène à chaque date une politique discrétionnaire). On postule de plus que les anticipations des agents se forment selon le mécanisme suivant :

$$\begin{aligned} \pi_t^a &= \pi^* \quad \text{si} \quad \pi_{t-1} = \pi_{t-1}^a, \\ \pi_t^a &= \widehat{\pi} \quad \text{si} \quad \pi_{t-1} \neq \pi_{t-1}^a. \end{aligned}$$

5. Quelle est la nature de la punition subie par un décideur qui ne respecte pas la règle de politique monétaire ? Combien de temps dure cette punition ?
   On se demande dans un premier temps si la Banque centrale est en mesure d'implémenter la règle optimale. On considère donc le cas $\pi^* = 0$.
6. Calculez le gain immédiat de la tricherie.
7. Calculez le coût actualisé de la tricherie.
8. La règle $\pi^* = 0$ est-elle crédible ?
   On cherche alors la meilleure des règles crédibles, c'est-à-dire celle qui minimise la fonction de perte sous la contrainte de cohérence temporelle de la politique annoncée.
9. Déterminez la meilleure règle crédible.

Éléments de correction

1. Le terme $\frac{a}{2}\pi^2$ est le coût de l'inflation. Le terme $b(\pi - \pi^a)$ est le bénéfice de l'inflation non anticipée. En effet, si l'on se réfère à la courbe de Phillips augmentée, une surprise d'inflation réduit le chômage et augmente la production à court terme.
2. Lorsque la Banque centrale suit une règle, les agents anticipent parfaitement que l'annonce initiale d'inflation sera tenue. La Banque centrale cherche donc à minimiser l par rapport à π sous la contrainte que $\pi^a = \pi$. Il s'agit alors de minimiser $a\pi^2/2$, donc $\pi = 0$ et $l = 0$.
3. La réponse est non. Si la Banque centrale annonce une inflation nulle et que les agents la croient, alors la banque voudra changer de politique au moment de choisir le taux d'inflation. En effet, lorsque $\pi^a = 0$, elle minimise
   $$\frac{a}{2}\pi^2 - b\pi$$
   et choisit donc $\pi = b/a$.
4. Lorsque les agents anticipent une inflation π^a, la Banque centrale minimise l, ce qui donne $\widehat{\pi} = b/a$. L'équilibre est donc
   $$\pi = \pi^a = \widehat{\pi} = \frac{b}{a} > 0 \qquad \text{et} \qquad \widehat{l} = \frac{b^2}{2a} > 0.$$
   On a $\widehat{l} > 0$: il est coûteux pour une Banque centrale de ne pas pouvoir s'engager à limiter l'inflation. Si la Banque centrale ne peut pas se lier les mains et suivre une règle, les agents anticipent qu'elle voudra faire de l'inflation, ce qui augmente la fonction de perte.
5. La punition consiste en une perte de réputation. Une Banque centrale qui n'a pas tenu ses promesses hier est considérée comme ne les tenant pas aujourd'hui. Dans ce cas, les agents jouent l'équilibre cohérent temporellement. À l'inverse, une Banque centrale qui tient sa promesse garde la confiance des agents pour la période suivante.
   La punition ne dure qu'une période.

6. La perte en trompant les agents est

$$\tilde{l} = \frac{a}{2}\hat{\pi}^2 - b(\hat{\pi} - 0) = -\frac{b^2}{2a}.$$

Le gain à la tricherie est donc

$$0 - \tilde{l} = \frac{b^2}{2a}.$$

7. Le coût de la tricherie aujourd'hui correspond à la perte de réputation pour demain. La perte d'une banque crédible est 0 et celle d'une banque non crédible est

$$\hat{l} = \frac{a}{2}\hat{\pi}^2 = \frac{b^2}{2a}.$$

Le coût actualisé de la tricherie est

$$\frac{1}{1+\theta}\left(\hat{l} - 0\right) = \frac{1}{1+\theta}\frac{b^2}{2a}.$$

8. $\theta > 0$ donc le gain actualisé net à tricher est strictement positif. La banque a intérêt à tricher et l'annonce $\pi^* = 0$ n'est donc pas crédible.
9. La meilleure règle crédible minimise

$$\frac{a}{2}\pi^{*2}$$

sous la contrainte

$$l^* - \tilde{l}(\pi^*) \leqslant \frac{1}{1+\theta}(\hat{l} - l^*),$$

avec

$$l^* = \frac{a}{2}\pi^{*2}, \qquad \hat{l} = \frac{b^2}{2a}, \qquad \tilde{l}(\pi^*) = \frac{b^2}{2a} - b\left(\frac{b}{a} - \pi^*\right) = -\frac{b^2}{2a} + b\pi^*.$$

Cela revient à minimiser π^* sous la contrainte que la banque ne triche pas, ce qui est équivalent à, après calculs,

$$\frac{\theta}{2+\theta}\frac{b}{a} \leqslant \pi^* \leqslant \frac{b}{a}.$$

La meilleure règle crédible est

$$\pi^* = \frac{\theta}{2+\theta}\frac{b}{a}.$$

8. REPÈRES BIBLIOGRAPHIQUES

Les modèles développés sont en général simples : vous pouvez donc vous référer directement aux textes cités dans le chapitre. Sinon, Walsh (2003), au chapitre 8, couvre la plupart des thèmes abordés ; ou bien, Blanchard et Fischer (1989), à la section 11.4.

CHAPITRE 9

Fluctuations, cycles réels et monétaires

1. INTRODUCTION

L'évolution des grandeurs macroéconomiques se conforme à un certain nombre de régularités qui intriguent les économistes depuis longtemps. Une partie d'entre elles a été reprise dans la célèbre « théorie des cycles emboités » proposée Schumpeter dans son livre sur le « cycle des affaires » paru en 1939. Schumpeter distingue les cycles longs, dits de Kondratiev, dont la durée est de l'ordre de 50-60 ans, des cycles plus courts qui le composent ; notamment, les cycles de Kuznets (15-20 ans), Juglar (8-10 ans), Kitchin (3-5 ans). Quatre cycles de Kondratiev sont habituellement repérés : 1780-1840 (la révolution industrielle), 1840-1900, 1900-1950 et depuis 1950. Chacun est associé aux innovations majeures ou aux activités dominantes qui les ont exploitées : pour les trois premiers cycles, il s'agit respectivement du textile et de la machine à vapeur (1780-1840), du chemin de fer (1840-1900), de l'électricité et l'automobile (1900-1950) ; l'existence du cycle de Kondratiev actuel ne serait pas bien établie.

Le NBER reste sceptique quant à l'existence des cycles longs et ne répertorie que des cycles courts (cf. Annexe 4.1). La figure 1 donne (le logarithme d'un indice de) la production aux EU depuis 1920 ; on peut y distinguer la fin du troisième cycle de Kondratiev. La crise des années 30 est particulièrement importante au regard des autres récessions de l'économie américaine (par exemple la crise pétrolière de 1973 ou la récession du début des années 1980 associée à la politique de désinflation menée par la Fed). La figure 2 isole les cycles courts ; leur durée est toujours voisine de 5 ans, mais on observe qu'ils ont tendance à s'amortir depuis les années 1960.

Les cycles longs relèvent plutôt des théories de la croissance. On s'intéressera ici aux cycles courts. Jusque dans les années 1970, la théorie économique a cherché à rendre compte de ces cycles en s'appuyant sur l'idée qu'ils correspondaient à une réponse de l'économie à un déséquilibre temporaire.

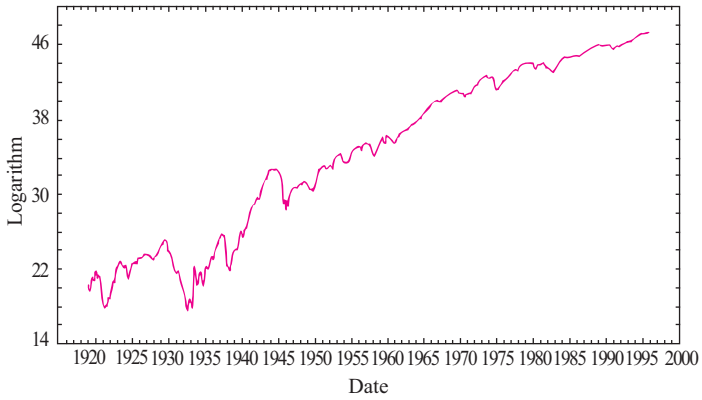


FIGURE 1
Production industrielle aux États-Unis

Le mécanisme de base était celui du multiplicateur-accélérateur au coeur des premiers modèles de croissance keynésiens (de type Harrod-Domar examiné dans le chapitre 2) et que l'on attribue habituellement à Samuelson (1939). Ce mécanisme est très simple à comprendre. Il part du constat que, dans la théorie keynésienne de court terme, l'investissement est uniquement vu comme une composante de la demande agrégée. Pourtant, à terme, il doit aussi se traduire par une modification du stock de capital, de la capacité de production, et ainsi de l'offre agrégée. Nous avons vu la forme particulière prise par la condition d'équilibre dans le chapitre 2 : si le marché des biens est équilibré à un instant donné, l'investissement d'aujourd'hui se traduit par une hausse de l'offre agrégée demain, de sorte que l'investissement demain doit être plus élevé que celui d'aujourd'hui (il doit croître au taux de croissance « garanti »).

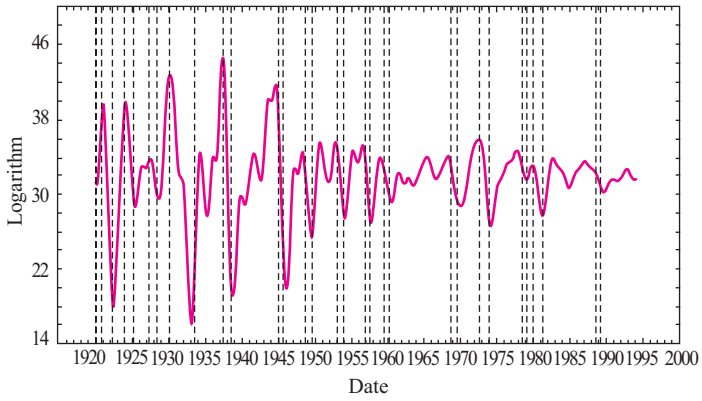


FIGURE 2
Le cycle des affaires

Si les entrepreneurs anticipent une demande future plus élevée qu'aujourd'hui, et qu'ils souhaitent satisfaire cette demande, ils doivent augmenter leur stock de capital : l'investissement (la variation du stock de capital) est donc lié à la fois à la variation de la production (au travers de « l'effet accélérateur ») et au *niveau* de la demande (au travers de « l'effet multiplicateur »). Intuitivement, lorsque les entrepreneurs constatent une demande excédentaire, ils devraient plutôt augmenter l'investissement, ce qui contribue à accroître encore la demande agrégée. La hausse du stock de capital qui en résulte tend plutôt à réduire l'excès de demande. Si cet excès de demande se comble (ce qui ne se produit pas systématiquement), on devrait observer un ralentissement puis finalement une baisse de l'investissement, amorçant la phase de retournement du cycle. L'économie oscille alors spontanément en réponse à des excès d'offre ou de demande observés sur le marché des biens.

Certaines des prédictions de la dynamique multiplicateur-accélérateur sont empiriquement pertinentes ; par exemple, le caractère volatil de l'investissement (cf. tableau 1). Toutefois, lorsque la demande anticipée dépend de la demande passée, le caractère procyclique de l'investissement, que l'on observe en pratique, n'est pas net. En outre, à l'exception de cas particuliers, les oscillations prédites par la théorie ne sont pas auto-entretenues, ce qui ne s'accorde pas avec la persistance de fluctuations de court/moyen terme relativement régulières qui apparaissent dans la figure 2.

Deux pistes principales ont été explorées : (1) l'économie peut être affectée par des chocs exogènes, réels ou monétaires, qui constituent une impulsion sans cesse renouvelée à laquelle l'économie répond, et (2) les anticipations elles-mêmes peuvent se révéler source d'instabilité. L'objet de ce chapitre est de décrire la première de ces deux pistes. La seconde sera présentée dans le chapitre suivant.

2. LE COURANT DES CYCLES RÉELS

2.1. Faits et présupposés

Le courant des cycles réels cherche à rendre compte de la variabilité des grandeurs macroéconomiques ; les cycles sont assimilés aux fluctuations de ces grandeurs autour d'une tendance de long terme. Un certain nombre de faits stylisés se retrouvent dans la plupart des économies développées. Comme le montre le tableau 1 ci-dessous[1], la productivité (horaire) du travail s'écarte relativement peu de sa valeur moyenne en France (sur la période 1970-1990) ; de même que les heures de travail ou la consommation[2]. La variabilité de la production est en général un peu plus importante, et celle de l'investissement nettement plus prononcée. Ainsi, l'investissement est plus volatil que la production, elle-même plus volatil que l'emploi et la consommation, qui sont tous les deux plus volatils que la productivité du travail.

1. Ce tableau est tiré de Hairault (1992).
2. Il s'agit de la différence entre le logarithme de la consommation agrégée et le logarithme de sa moyenne sur la période considérée.

Propriétés cycliques sur données trimestrielles françaises (1970-1990)					
Série	$\widehat{y}$	$\widehat{c}$	$\widehat{i}$	$\widehat{h}$	$\widehat{p}$
Écart type	0,91	0,81	3,64	0,83	0,65
Écart type/écart type $(\widehat{y})$	1	0,9	4,01	0,92	0,72
Autocorrélation d'ordre 1	0,76	0,67	0,82	0,89	0,63
Corrélation avec $\widehat{y}$	1	0,63	0,80	0,72	0,45
Corrélation avec $\widehat{h}$					−0,35

TABLEAU 1
Quelques faits stylisés concernant l'évolution des variables macroéconomiques

En outre, chacune de ses variables évolue conjointement avec l'activité (on dit que leur évolution est « procyclique ») et l'autocorrélation d'ordre 1 est élevée (on parle alors de « persistance »).

Le parti pris du courant des cycles réels est le suivant : ces fluctuations sont la réponse optimale de l'économie à des chocs exogènes réels.

Chaque mot est important. D'abord, ce sont des « chocs » perturbant l'économie, touchant par exemple la technologie, les préférences des ménages ou la politique économique, qui sont à l'origine des fluctuations. Ensuite, ces chocs sont « réels », et non pas monétaires. La monnaie ne joue aucun rôle dans les fluctuations ; pour le dire autrement, en l'absence de chocs réels, l'économie ne connaîtrait pas de fluctuations.

Enfin, ces chocs constituent une impulsion à laquelle l'économie répond « optimalement » : les agents font désormais face à une incertitude et, au travers de leur désir de lisser les fluctuations de leur revenu au cours du temps, l'effet de ces chocs va se répercuter sur les périodes suivantes. D'une impulsion temporaire peut donc découler une certaine persistance, le choc temporaire se propageant dans le temps. C'est ce qu'on appelle un « effet Slutsky ».

Cette section décrit une version simple du modèle de base utilisé par ce courant. Il étend le modèle de croissance optimale de Ramsey dans deux directions : d'une part, il prend en compte l'incertitude et, d'autre part, l'offre de travail n'est plus inélastique. En général, de tels modèles ne sont pas solubles analytiquement, et l'on doit se livrer à des exercices de calibration pour décrire la réaction de l'économie à des chocs de différentes natures. Si, en pratique, cette approche peut être informative, elle rend difficile la compréhension des principaux mécanismes économiques à l'oe uvre. Pour cette raison, dans cette section, on considérera une version simple de ce modèle dans laquelle la dépréciation du capital est intégrale ($\delta = 1$) ; cette hypothèse est évidemment peu réaliste, mais elle permet de traiter analytiquement le modèle.

On procèdera en deux temps : d'abord, l'offre de travail sera supposée inélastique, comme dans les chapitre précédents, mais un aléa affectant la production sera pris

en compte. Ceci nous permet d'identifier le mécanisme de base au travers duquel un choc temporaire est associé à une forme de persistance des variables agrégées. Par contre, ce cadre ne nous permet pas de rendre compte de la corrélation entre la production et l'emploi ; aussi, dans un second temps, l'offre de travail sera-t-elle supposée élastique, ce qui nous permettra d'identifier le second mécanisme mis en avant par le courant des cycles réels, qui a trait à la substitution du travail ou du loisir au cours du temps.

2.2. La persistance de chocs temporaires

Supposons que la production agrégée soit touchée par des chocs technologiques. Lorsque la production s'élève, pour un stock de capital et une quantité de travail donnés, le ménage fait face à deux alternatives. Il peut consommer le surplus de production, auquel cas la consommation devient très volatile, comme la production. Cette réponse est peu vraisemblable, et ne s'accorde pas vraiment avec les faits stylisés illustrés dans le tableau 1. En fait, la théorie du revenu permanent suggère plutôt que le ménage ne va consommer qu'une partie du surplus de production qu'il perçoit, et épargner le reste pour le consommer plus tard, lorsque son revenu sera plus bas. Il se constitue ainsi une épargne qui implique une hausse du stock de capital, et avec elle de la production future. Le choc technologique, bien que temporaire, est alors propagé dans le temps et induit une autocorrélation de la production agrégée.

2.2.1. Le cadre

Pour savoir si ce mécanisme est susceptible de rendre compte de l'autocorrélation de la production du tableau 1, considérons le modèle de Ramsey du chapitre 5 dans lequel la population est cette fois supposée constante (et de taille normalisée à 1). La fonction de production agrégée s'écrit

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t) = K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha} \equiv K_t^{\alpha} U_t, \tag{9.1}$$

où A_t est un choc affectant la production au travers de l'efficacité du travail à la date t. Pour l'instant, la loi de ce choc n'est pas précisée.

Si le capital se déprécie intégralement, on a :

$$K_{t+1} = I_t = Y_t - C_t. \tag{9.2}$$

Enfin, on supposera que les préférences du ménage sont représentées par la fonction d'utilité

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\theta)^t} \log(C_t). \tag{9.3}$$

En utilisant l'équivalence entre l'équilibre décentralisé et l'optimum, la dynamique de la consommation et du stock de capital à l'équilibre est la solution du problème du planificateur central. Elle maximise (9.3) sous les deux contraintes (9.1) et (9.2), avec $C_t \geqslant 0$ et $K_t \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$, et K_0 donné.

Dans la mesure où la production est aléatoire, la consommation optimale dépend de la suite des réalisations du choc technologique. C'est pour cette raison qu'apparaît l'opérateur E_0 dans (9.3) : l'utilité est espérée en 0. Si nous avions choisi de décrire l'équilibre décentralisé, cette incertitude serait apparue dans le problème du ménage au travers des prix des facteurs de production.

En utilisant (9.1) et (9.2), l'objectif du planificateur est de choisir une suite de stocks de capital associée à K_0 qui maximise

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\theta)^t} \log(K_t^\alpha U_t - K_{t+1}).$$

La condition du premier ordre par rapport à K_{t+1} est :

$$E_0 \left(\frac{1}{(1+\theta)^{t+1}} \frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} U_{t+1}}{K_{t+1}^\alpha U_{t+1} - K_{t+2}} - \frac{1}{(1+\theta)^t} \frac{1}{K_t^\alpha U_t - K_{t+1}} \right) = 0.$$

Le stock de capital K_t est donné en t. C'est le stock de capital K_{t+1} qui est choisi lors de cette période ; on supposera qu'alors le choc U_t est réalisé. On peut donc réécrire la condition du premier ordre précédente sous la forme

$$\frac{1}{K_t^\alpha U_t - K_{t+1}} = \frac{1}{1+\theta} E_t \left(\frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} U_{t+1}}{K_{t+1}^\alpha U_{t+1} - K_{t+2}} \right),$$

et en réutilisant (9.1) et (9.2), on obtient finalement :

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{1+\theta} E_t \left(\frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} U_{t+1}}{C_{t+1}} \right). \tag{9.4}$$

On reconnaît l'équation d'Euler des chapitres 4 et 5 ; cette condition peut donc s'interpréter comme le résultat d'un arbitrage entre la consommation future et la consommation présente. Pour le voir, supposons que le ménage renonce en t à consommer une unité de bien. La désutilité (marginale) subie est égale à $1/C_t$ mais l'épargne augmente d'une unité, l'investissement d'une unité (puisque l'épargne est égale à l'investissement en l'absence de monnaie ou de tout autre actif permettant de transférer la richesse au cours du temps autrement qu'en détenant du capital physique), et donc le stock de capital augmente d'une unité en $t+1$ (puisque la dépréciation est complète). Au final, le supplément de production que l'on obtient est égal à $\partial Y_{t+1}/\partial K_{t+1}$, soit $\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} U_{t+1}$ si le choc U_{t+1} se réalise. Le supplément de bien-être est alors

$$\frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} U_{t+1}}{C_{t+1}},$$

où la consommation et le capital sont évalués le long de la trajectoire initiale. Si cette trajectoire est optimale, il n'est pas profitable de mettre en œuvre cette déviation. C'est ce que dit (9.4).

Notez que $\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} U_{t+1}$ est ici le taux d'intérêt réel. En confondant E_t avec l'opérateur espérance, on a

$$E_t\left(\frac{r_{t+1}}{C_{t+1}}\right) = E_t(r_{t+1})\, E_t\left(\frac{1}{C_{t+1}}\right) + \operatorname{cov}\left(r_{t+1}, \frac{1}{C_{t+1}}\right).$$

Si la consommation est faible lorsque le taux d'intérêt est élevé (la covariance entre le taux d'intérêt r_{t+1} et l'utilité marginale de la consommation $1/C_{t+1}$ est positive), l'épargne est plutôt favorisée lorsque le taux d'intérêt est élevé par rapport à la situation où l'on aurait $\operatorname{cov}(r_{t+1}, 1/C_{t+1}) = 0$, ce qui tend à réduire la consommation courante.

2.2.2. L'équilibre

Pour résoudre (9.4), on utilise la « méthode des coefficients indéterminés ». Nous l'avons déjà utilisé dans le chapitre 8 pour obtenir la solution optimale lorsque l'autorité souhaite stabiliser les fluctuations causées par des chocs exogènes perturbant la production. Cette méthode consiste à conjecturer une fonction de consommation et à vérifier ex post que cette fonction est effectivement solution de (9.4). Ici, le fait que les préférences du ménage soient de type Cobb-Douglas nous invite à retenir une consommation proportionnelle au revenu. C'est-à-dire :

$$C_t = cY_t. \tag{9.5}$$

Pour cette fonction,

$$\frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} U_{t+1}}{C_{t+1}} = \frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} U_{t+1}}{cY_{t+1}} = \frac{\alpha}{c}\frac{1}{K_{t+1}} = \frac{\alpha}{c}\frac{1}{Y_t - C_t}.$$

Si, à nouveau, l'aléa U_t est réalisé au début de la période t, alors $Y_t - C_t$ est connu en t, et (9.4) implique :

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{1+\theta}\frac{\alpha}{c}\frac{1}{Y_t - C_t} \Leftrightarrow C_t = \frac{(1+\theta)\, c/\alpha}{1+(1+\theta)\, c/\alpha} Y_t.$$

En identifiant avec (9.5), on a :

$$c = \frac{(1+\theta)\, c/\alpha}{1+(1+\theta)\, c/\alpha} \Leftrightarrow c = 1 - \frac{\alpha}{1+\theta}. \tag{9.6}$$

Le ménage consomme donc une proportion de son revenu à l'équilibre, et cette proportion est d'autant plus grande qu'il est impatient (θ est grand) et que la productivité marginale du capital est faible (α est proche de 0).

L'équation d'accumulation (9.2) donne finalement l'évolution du stock de capital agrégé au cours du temps :

$$K_{t+1} = (1-c) K_t^{\alpha} U_t. \tag{9.7}$$

Pour se rapprocher du tableau 1, dans lequel la variable capital reportée est la différence entre le logarithme du capital agrégé et le logarithme de sa valeur stationnaire déterministe. Soient $k_t \equiv \log K_t$ et $u_t \equiv \log U_t$. Alors, (9.7) devient

$$k_{t+1} = \log(1-c) + \alpha k_t + u_t.$$

En notant $\bar{k}$ le stock tel que $\bar{k} = \log(1-c) + \alpha \bar{k}$ et $\bar{k}_t = k_t - \bar{k}$, on a finalement :

$$\bar{k}_{t+1} = \alpha \bar{k}_t + u_t. \tag{9.8}$$

Le stock de capital est bien autocorrélé au cours du temps.

2.2.3. Les chocs technologiques

Si u_t est un bruit blanc, le capital suit un AR(1) ; le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 est égal à α. Il est raisonnable de le prendre égal à 1/3 environ. Avec le capital, toutes les autres variables macroéconomiques (la production, la consommation, l'épargne et l'investissement) se conforment à un AR(1) similaire. Un choc en t se propage au cours du temps, la réaction des variables macroéconomiques étant atténuées par rapport au choc initial : on retrouve l'effet Slutsky.

Néanmoins, la corrélation est bien plus faible que celle qui apparaît dans le tableau 1 (égale à 0,76). Cette section s'est concentrée sur un cas simple et particulier, mais l'on s'accorde en général pour reconnaître que les modèles de cycles réels, dans l'interprétation stricte retenue ici, ne suffisent pas à rendre compte de l'autocorrélation des variables macroéconomiques au cours du temps (cf. Hairault, 1992).

Peut-être la prise en compte d'une persistance plus élevée des chocs technologiques permettrait-elle de réconcilier faits et théories ? Après tout, une fois une innovation réalisée, elle est acquise pour un certain temps. Supposons donc que

$$u_t = g + u_{t-1} + \varepsilon_t.$$

En moyenne, U_t croît au taux g. Alors (9.8) devient

$$\bar{k}_{t+1} = \alpha \bar{k}_t + u_t = \alpha \bar{k}_t + g + u_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Comme $\bar{k}_t = \alpha \bar{k}_{t-1} + u_{t-1}$, on obtient

$$\bar{k}_{t+1} - \bar{k}_t = \alpha(\bar{k}_t - \bar{k}_{t-1}) + g + \varepsilon_t.$$

C'est donc maintenant le taux de croissance du capital K_t qui est autocorrélé dans le temps (et non plus son niveau). Considérons dans ce cadre l'exercice suivant : un choc (qui perturbe le taux de croissance de l'efficacité du travail) survient en t_0 alors que le taux de croissance du capital s'était stabilisé, $\bar{k}_t - \bar{k}_{t-1} = g/(1-\alpha)$ en $t = t_0$. En itérant l'équation précédente, on obtient :

$$\bar{k}_{t_0+i} - \bar{k}_{t_0+i-1} = \alpha^i(\bar{k}_{t_0} - \bar{k}_{t_0-1}) + g\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} + \alpha^i \varepsilon_{t_0}$$

et comme $\bar{k}_{t_0} - \bar{k}_{t_0-1} = g/(1-\alpha)$, on en déduit finalement que

$$\bar{k}_{t+i} - \bar{k}_{t+i-1} = \frac{g}{1-\alpha} + \alpha^i \varepsilon_{t_0}.$$

Si $\varepsilon_{t_0} > 0$, le taux de croissance augmente en t_0 et s'affaiblit progressivement (mais reste positif) jusqu'à retrouver sa valeur de long terme ; le niveau du capital est plus élevé qu'il ne l'aurait été en l'absence de choc, le supplément étant égal à

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t_0} = \frac{\varepsilon_{t_0}}{1-\alpha}.$$

Mais, pour α proche de 1/3, l'amplification du choc reste très limitée.

Remarque 9.1

Si le choc est permanent (il se reproduit à chaque date), la production est plus élevée à chaque date, et le ménage consomme plus et investit moins de façon permanente. Ce sont donc les chocs transitoires qui donnent lieu à fluctuations, et non les chocs permanents.

Remarque 9.2 ***Règle d'or modifiée.***

Dans le chapitre 5, nous avons vu que le stock de capital à long terme était tel que $f'(k^*) - \delta = n + \theta$ (on avait alors supposé $\delta = 0$). Ici, $\delta = 1$ et $n = 0$, de sorte que ce stock est tel que $f'(k^*) = 1 + \theta$. En présence d'un aléa,

$$\log r_t = \log \alpha K_t^{\alpha-1} U_t = \log \alpha + (\alpha - 1) k_t + u_t.$$

Il suit de (9.8) que

$$k_t = \bar{k} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i u_{t-i},$$

de sorte que

$$\log r_t = \log \alpha + (\alpha - 1)\bar{k} + u_t + (\alpha - 1) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i u_{t-i}$$

$$\Rightarrow E \log r_t = \log \alpha + (\alpha - 1)\bar{k} = \log(1 + \theta),$$

où E est l'espérance (non conditionnelle). En appliquant l'inégalité de Jensen,

$$\log(E r_t) > E(\log r_t) = \log(1 + \theta) \Rightarrow E r_t > 1 + \theta.$$

En moyenne, le taux de rendement réel est supérieur à celui qui maximiserait la consommation en l'absence d'aléa.

Plusieurs des faits stylisés du tableau 1 restent inexpliqués à ce stade, notamment les variabilités différentes des variables agrégées au cours du temps et la corrélation positive entre la production et les heures de travail. Un cadre plus riche, avec des chocs différents sur chacun des facteurs de production et sur les goûts des ménages, conduirait à des écart-types différant selon les variables agrégées. Nous allons donc nous concentrer sur le second point.

2.3. Emploi et activité

Le courant des cycles réels s'appuie sur un mécanisme très simple pour rendre compte de la corrélation positive entre le nombre d'heures travaillées et la production agrégée, tout en étant conciliable avec la faible variabilité de la productivité horaire du travail, et ainsi du salaire réel. Lorsque la production est soumise à des chocs temporaires (éventuellement faibles), le salaire réel varie au cours du temps (éventuellement faiblement), ce qui incite les ménages à substituer du loisir courant à du loisir futur. Si l'élasticité de substitution intertemporelle du loisir est suffisamment grande, l'emploi varie beaucoup. Par exemple, lorsque la production courante subit un choc positif qui accroît la productivité du travail, le salaire réel courant augmente par rapport au salaire réel futur, ce qui devrait inciter le ménage à travailler plus aujourd'hui et moins demain : on retrouve bien la corrélation positive entre la production et l'emploi.

Cet argument suggère que l'offre de travail devrait plutôt réagir à des chocs transitoires, et moins à des chocs permanents qui modifieraient les salaires dans la même proportion. Pour l'illustrer, reprenons le modèle de Ramsey utilisé dans la section précédente, mais supposons maintenant que le bien-être instantané à la date t dépend à la fois de la consommation et du travail fourni L_t, soit :

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\theta)^t} \left(C_t - \frac{1}{\rho} L_t^{\rho} \right).$$

La fonction de production agrégée s'écrit toujours comme dans (9.1), mais la quantité de travail n'est plus nécessairement égale à 1 :

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} U_t.$$

Plaçons-nous à la date t, une fois U_t réalisé et connu. Une condition nécessaire pour que la quantité de travail soit optimale est qu'en augmentant la quantité de travail d'une unité à cette date et en consommant le supplément de production à cette même date, le planificateur ne puisse pas accroître le bien-être du ménage. Le coût d'une telle modification est égal à $L_t^{\rho-1}$, alors que la consommation du supplément de production procure un supplément de bien-être égal à :

$$(1-\alpha) K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} U_t.$$

À l'optimum, on doit donc avoir :

$$L_t^{\rho-1} = (1-\alpha) K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} U_t = w_t,$$

où la dernière égalité est obtenue en identifiant le salaire réel et la productivité marginale du travail. On a ainsi, en particulier,

$$\frac{L_t}{L_{t+1}} = \left(\frac{w_t}{w_{t+1}}\right)^{\sigma},$$

où $\sigma = 1/(\rho - 1)$ représente l'élasticité de substitution intertemporelle du travail. Un choc permanent sur la productivité globale des facteurs U_t ne modifie ni le rapport w_t/w_{t+1} ni le rapport L_t/L_{t+1} ; un choc transitoire qui conduirait à une hausse du rapport w_t/w_{t+1} s'accompagnerait d'une hausse de l'offre de travail courante par rapport à celle de la période suivante, l'emploi évoluant alors de manière procyclique.

En pratique, toutefois, les estimations de l'élasticité de substitution intertemporelle restent faibles, surtout pour les hommes (elles seraient assez proches de 0). En outre, les modifications de salaire au cours du temps s'accompagnent également d'un effet revenu susceptible de contrecarrer l'effet de substitution intertemporel. Dans l'exemple précédent, où l'utilité instantanée était quasi-linéaire, tous les effets de revenu étaient reportés sur la consommation. Si la fonction d'utilité s'écrit

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\theta)^t} \left[\log C_t - \frac{1}{\rho} L_t^{\rho}\right], \tag{9.9}$$

la condition du premier ordre devient :

$$L_t^{\rho-1} = \frac{(1-\alpha)K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} U_t}{C_t} = \frac{(1-\alpha)Y_t/L_t}{C_t}.$$

Pour $C_t = cY_t$, l'offre de travail est indépendante du choc technologique courant.

3. NEUTRALITÉ DES CHOCS MONÉTAIRES

Les chocs réels ne permettent pas, à eux seuls, de rendre compte de la volatilité observée des variables macroéconomiques. Il semble en outre peu vraisemblable que les fluctuations de l'emploi soient volontaires le long du cycle, résultant d'un simple arbitrage entre le travail et le loisir à chaque instant.

Dans cette section, nous examinons l'effet de chocs monétaires sur l'activité. Si, comme le prédisent des versions de la théorie quantitative de la monnaie, la quantité de monnaie ou son taux de croissance n'influencent pas les variables réelles, et ne se soldent que par un mouvement du niveau général des prix ou de l'inflation, la monnaie joue effectivement un rôle assez limité dans les fluctuations de l'activité.

Nous allons aborder dans cette section, pour la première fois, l'une des spécificités de la dynamique de l'économie : l'évolution effective des variables agrégées est en partie le reflet des théories qu'ont les agents sur cette évolution. Alors qu'en l'absence de chocs monétaires, la monnaie est neutre, nous allons construire des équilibres dans lesquels la monnaie ne l'est plus en présence de chocs, parce que les agents ne croient pas que la monnaie est neutre.

3.1. Un cadre déterministe

Considérons une version du modèle à générations imbriquées avec monnaie de Samuelson décrit dans le chapitre 7. Dans cette version, à la date t, lorsqu'un agent vieux (de la génération $t-1$) détient une quantité M_{t-1} de monnaie, l'État lui verse un supplément proportionnel à son encaisse, de sorte que cet agent détient finalement $M_t = (1+\mu)M_{t-1}$. Le taux de croissance de la masse monétaire est donc égal à μ et il peut être interprété comme un taux d'intérêt nominal.

Un agent de la génération t choisit un plan de consommation (c_{1t}, c_{2t+1}) qui maximise son utilité

$$u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$$

sous les deux contraintes de budget

$$c_{1t} + m_t = e_1$$

et

$$c_{2t+1} = e_2 + \frac{1+\mu}{1+\pi_{t+1}} m_t.$$

Soit :

$$m_t \equiv m\left(\frac{1+\mu}{1+\pi_{t+1}}\right)$$

l'encaisse réelle désirée. Elle est définie implicitement par la condition du premier ordre

$$u'(e_1 - m_t) = \beta \frac{1+\mu}{1+\pi_{t+1}} u'\left(e_2 + \frac{1+\mu}{1+\pi_{t+1}} m_t\right). \tag{9.10}$$

Un équilibre à la date t est une situation dans laquelle les deux générations présentes se comportent rationnellement (les jeunes résolvent le problème d'optimisation ci-dessus, les vieux offrent toute la monnaie qu'ils détiennent et demandent des biens de consommation en contrepartie) et l'offre est égale à la demande sur chaque marché.

Il y a deux marchés ouverts à cette date : le marché des biens et le marché de la monnaie. Si ces deux marchés étaient équilibrés lors de la période précédente, la loi de Walras implique que seul le marché de la monnaie peut être considéré lors de la période courante. Aussi, un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites est une situation dans laquelle le marché de la monnaie est équilibré :

$$\bar{M}_t = p_t m\left(\frac{1+\mu}{1+\pi_{t+1}}\right)$$

avec

$$\bar{M}_t = (1+\mu)\bar{M}_{t-1}.$$

Il suit de la règle d'émission de monnaie décidée par l'État que

$$\frac{1+\mu}{1+\pi_{t+1}} = \frac{m_{t+1}}{m_t}, \tag{9.11}$$

de sorte qu'un équilibre est une suite d'encaisses réelles $(m_t, t \geqslant 0)$ telle que

$$m_t = m\left(\frac{m_{t+1}}{m_t}\right). \tag{9.12}$$

En utilisant (9.10), la dynamique de l'économie peut aussi s'écrire en fonction des fondamentaux de l'économie (ici, les préférences des agents) :

$$m_t u'(e_1 - m_t) = \beta m_{t+1} u'(e_2 + m_{t+1}), \tag{9.13}$$

avec $m_t \equiv \bar{M}_t / p_t$. Les équations (9.12) et (9.13) sont toutes les deux indépendantes du taux de croissance de la masse monétaire. La quantité de monnaie réelle à l'équilibre est donc indépendante du taux de croissance μ de la masse monétaire. Il suit de la règle de politique monétaire, sous la forme de (9.11), qu'une hausse du taux de croissance de la masse monétaire se retrouve à l'équilibre dans une hausse identique du taux d'inflation. Les contraintes budgétaires de première et seconde période donnent alors que la consommation est indépendante du taux de croissance de la masse monétaire.

Au total, dans ce cadre, lorsque le taux de croissance de la masse monétaire est déterministe, la monnaie est superneutre et l'on retrouve la théorie quantitative.

3.2. Un cadre stochastique

Supposons maintenant que le taux de croissance de la masse monétaire est aléatoire ; pour simplifier, ce taux est i.i.d. de moyenne μ.

Les ménages jeunes sont supposés connaître en t (au moment où ils choisissent leur plan de consommation et leur encaisse réelle) le stock de monnaie précédent $\bar{M}_{t-1}$ et le prix courant p_t (cette dernière hypothèse pourrait être discutée). Par contre, ils n'observent pas le taux de croissance de la masse monétaire courant réalisé μ_t (c'est-à-dire qu'ils n'observent pas la quantité de monnaie courante) ; bien sûr, ils ne connaissent pas non plus la masse monétaire future et le prix futur, qu'ils doivent anticiper.

3.2.1. La formation des anticipations

Comment forment-ils alors leurs anticipations ? Muth (1961) postule que les agents jeunes se forment une théorie sur le fonctionnement de l'économie. Dans le cas présent, un ensemble de théories raisonnables associent une hausse de la quantité de monnaie à une hausse des prix. Ou bien encore, étant donnée la quantité de monnaie passée, que

$$p_t = \phi_t(\mu_t)\bar{M}_{t-1}, \tag{9.14}$$

où $\phi_t(\cdot)$, $\phi_t(\cdot) > 0$, est une fonction à déterminer ; si cette fonction est croissante, les agents pensent qu'une hausse du taux de croissance de la masse monétaire conduit bien à une hausse du niveau général des prix.

Il est important de bien comprendre que cette équation n'est qu'une *conjecture* de la part des agents. Elle leur permet d'apprécier le taux de croissance de la masse

monétaire (qu'ils n'observent pas) en fonction du prix et de la quantité de monnaie passée (qu'ils observent) : si ϕ_t est monotone, ils pensent être capables de déduire le taux de croissance μ_t du prix courant.

Supposons que ϕ_t est monotone ; nous le vérifierons *ex post*. Étant donnée la conjecture (9.14), tout se passe comme si l'agent jeune connaissait l'état courant de l'économie. Aussi, à l'équilibre, on doit maintenant avoir, en utilisant (9.13),

$$m_t u'(e_1 - m_t) = \beta E_t \{m_{t+1} u'(e_2 + m_{t+1})\}, \tag{9.15}$$

où E_t est l'espérance conditionnelle à l'information possédée en t (ici, p_t, ou bien encore μ_t de façon équivalente, et M_{t-1}).

Un *équilibre à anticipations rationnelles* est une situation particulière dans laquelle la conjecture des agents se révèle exacte. En notant

$$m_t = \frac{\bar{M}_t}{p_t} = \frac{1+\mu_t}{p_t}\bar{M}_{t-1} = \frac{1+\mu_t}{\phi_t(\mu_t)} \equiv \psi_t(\mu_t),$$

l'équation (9.15) devient :

$$\psi_t(\mu_t) u'(e_1 - \psi_t(\mu_t)) = \beta E_t \{\psi_{t+1}(\mu_{t+1}) u'\left(e_2 + \psi_{t+1}(\mu_{t+1})\right)\}. \tag{9.16}$$

Lorsque les agents adhèrent à la théorie (9.14), ils forment des anticipations sur les encaisses réelles de demain données dans le membre de droite de l'égalité (9.14). Le membre de gauche, qui dépend des encaisses réelles effectives en t montre que la théorie des agents s'autoréalise aujourd'hui, dans le sens où ce que les agents jeunes observent aujourd'hui est cohérent avec la théorie (9.14).

3.2.2. Les croyances autoréalisatrices

Quelles sont les théories susceptibles de s'autoréaliser ?

Supposons par exemple que les agents croient que la monnaie est superneutre, la monnaie sera-t-elle superneutre ? Pour le savoir, supposons que les agents croient que la quantité de monnaie réelle $\psi_t(\mu_t)$ est indépendante de μ_t ; disons, $\psi_t(\mu_t) = \psi_t$ quel que soit t (alors, l'élasticité de ϕ_t par rapport à $(1+\mu_t)$ est égale à 1 : les agents jeunes croient que, si le facteur de croissance de la masse monétaire augmente de 1 %, les prix augmenteront de 1 %).

Dans ce cas, (9.16) se réécrit :

$$\psi_t u'(e_1 - \psi_t) = \beta \psi_{t+1} u'\left(e_2 + \psi_{t+1}\right), \tag{9.17}$$

où l'opérateur E_t a été omis puisqu'aucun aléa n'affecte plus l'économie (selon les agents). Mais (9.17) coïncide alors avec (9.13) : la monnaie est superneutre lorsque les agents croient en la superneutralité de la monnaie.

Est-ce la seule croyance autoréalisatrice ? Supposons maintenant que les agents croient que les encaisses réelles seront élevées lorsque le taux de croissance de la masse monétaire est élevé, ce qui traduit une forme extrême de confiance en la monnaie, et basses lorsque ce taux est bas. Par exemple, $\psi_t(\mu_t) = m > 0$ si $\mu_t \geqslant \bar{\mu}$ jusqu'en t, et $\psi_t(\mu_t) = 0$ sinon (c'est-à-dire lorsque le taux de croissance de la masse monétaire a été inférieur à $\bar{\mu}$ au moins une période jusqu'en t). Notons $\pi = \Pr(\mu_t \geqslant \bar{\mu})$.

Clairement, si $\mu_{t_0} < \bar{\mu}$ pour $t_0 \leqslant t$, les agents croient que $m_{t+1} = 0$, et il suit de (9.16) que $m_t = 0$, ce qui valide leur théorie.

Si $\mu_t \geqslant \bar{\mu}$ jusqu'en t, alors (9.16) devient :

$$mu'(e_1 - m) = \beta\pi m u'(e_2 + m)$$

$$\Leftrightarrow u'(e_1 - m) = \beta\pi u'(e_2 + m) \tag{9.18}$$

puisque $m > 0$. En appliquant le théorème des fonctions implicites, il est facile de vérifier que, par (9.18), m est une fonction croissante de π. Il reste à vérifier qu'elle prend ses valeurs dans $[0, e_1]$. Pour cela, remarquons que, pour $\pi = 1$, (9.18) définit m comme l'équilibre stationnaire monétaire m^* du modèle déterministe ; on a donc $m^* = m(1) \leqslant e_1$. Comme $m'(\pi) > 0$, les encaisses réelles seront inférieures à m^* pour $\pi \leqslant 1$; ces encaisses sont donc dans $[0, e_1]$, au moins pour des valeurs de π suffisamment proches de 1, ce qui correspond à des seuils $\bar{\mu}$ suffisamment petits : si les agents croient fortement en la non-neutralité de la monnaie, la monnaie ne sera pas neutre !

Les chocs monétaires peuvent donc se révéler source de fluctuations à l'équilibre lorsque l'information sur la masse monétaire est imparfaite.

Remarque 9.3

Notons que l'encaisse réelle n'est jamais parfaitement corrélée avec le taux de croissance de la masse monétaire à l'équilibre, au sens où elle ne peut être égale à m_j lorsque le taux de croissance de la masse monétaire est μ_j (avec la probabilité π_j). En effet, pour tout i, on devrait alors avoir, en utilisant (9.16),

$$m_i u'(e_1 - m_i) = \beta \sum_j \pi_j m_j u'\left(e_2 + m_j\right).$$

Clairement, le membre de droite est indépendant de i ; le membre de gauche est croissant avec m_i. On en déduit que $m_i = m_j = m$ pour tout i, j. La monnaie est alors neutre.

4. ANNEXE

4.1. Les cycles répertoriés par le NBER

Le premier cycle répertorié par le NBER débute en 1854. En moyenne, leur durée est légèrement supérieure à 50 mois environ, soit 4-5 ans (http ://www.nber.org/cycles.html). Le tableau 2 ci-dessous vous en donne des extraits. Il est tiré de Stock et Watson (1998).

NBER Business Cycle Reference Datas

Trough		Peak	
December	1854	June	1857
December	1858	October	1860
June	1861	April	1865
December	1867	June	1869
December	1870	October	1873
March	1879	March	1882
May	1885	March	1887
December	1854	June	1857
April	1888	July	1890
May	1891	January	1893
June	1894	December	1895
June	1897	June	1899
December	1900	September	1902
August	1904	May	1907
June	1908	January	1910
January	1912	January	1913
December	1914	August	1918
March	1919	January	1920
July	1921	May	1923
July	1924	October	1926
Novembre	1927	August	1929
March	1933	May	1937
June	1938	February	1945
October	1945	November	1948
October	1949	July	1953
May	1954	August	1957
April	1958	April	1960
February	1961	December	1969
November	1970	November	1973
March	1975	January	1980
July	1980	July	1981
November	1982	July	1990
March	1991		

Source : National Bureau of Economic Research

TABLEAU 2
Quelques données du NBER

5. EXERCICES ET PROBLÈMES

5.1. Anticipations rationnelles

On considère un modèle à générations imbriquées dans lequel les jeunes travaillent lorsqu'ils sont jeunes et consomment lorsqu'ils sont vieux. Durant leur jeunesse, les agents produisent un bien périssable selon une technologie à rendements constants normalisée de sorte qu'une unité de travail permet de produire une unité de bien, et ils épargnent les revenus du travail sous forme de monnaie. Durant leur vieillesse, ils perçoivent un intérêt nominal sur leur encaisse monétaire et consomment. L'État est supposé financer l'intérêt qu'il paye aux détenteurs de monnaie en émettant de la monnaie.

Le bien-être espéré d'un agent de la génération t est représenté par la fonction d'utilité $E_t(c_{t+1}) - l_t^2/2$, où c_{t+1} est la quantité de biens qu'il prévoit de consommer en $t+1$, l_t est son offre de travail courante, et E_t est un opérateur d'espérance conditionnelle à l'information détenue en t.

Soit m_t l'encaisse réelle détenue en t, μ_{t+1} le taux d'intérêt nominal versé en $t+1$ et p_t le prix du bien en t.

1. Écrivez les deux contraintes budgétaires d'un agent de la génération t.
2. Quelle condition doit satisfaire l'offre de travail d'un agent de la génération t ?
3. Soient N_t le nombre d'agents de la génération t, $n_t = (N_t - N_{t-1})/N_{t-1}$ le croissance démographique en t, et $\bar{M}_t$ l'offre de monnaie en t par tête d'agent de la génération $t-1$. Écrivez la condition d'égalité emplois/ressources à la date t sur le marché des biens, en supposant que tous les marchés étaient équilibrés dans le passé, en fonction de μ_t, μ_{t+1}, n_t, $\bar{M}_{t-1}$, p_t et p_{t+1}.
4. À la date t, les agents sont supposés observer le prix courant p_t et connaître l'histoire passée du système, notamment $\bar{M}_{t-1}$. Par contre, ils n'observent ni μ_t ni n_t ; bien sûr, le futur n'est pas connu en t. Les agents croient que

$$p_t = \phi(z_t, M_{t-1})$$

où z_t représente le rapport $(1+\mu_t)/(1+n_t)$. Définissez un équilibre à anticipations rationnelles de cette économie. Dans ce qui suit, on supposera que les chocs réels, représentés par n_t, et les chocs monétaires, représentés par μ_t, sont tous les deux i.i.d.

5. Soit

$$\psi(z_t, M_{t-1}) = \frac{z_t \bar{M}_{t-1}}{\phi(z_t, M_{t-1})}.$$

Que représente la fonction ψ ? Écrivez la définition d'un équilibre à anticipations rationnelles en fonction de ψ.

6. Supposons que $\phi(z, M)$ est monotone en z pour tout M. Comment l'équilibre est-il défini alors ?

7. On s'intéresse aux équilibres de la forme $\psi(z_t, M_{t-1}) = a(z_t)$. Commentez. Calculez la fonction $a(\cdot)$. En admettant que $z/a(z)$ est croissante avec z, décrivez le mécanisme économique par lequel les croyances des agents sont autoréalisatrices.

6. REPÈRES BIBLIOGRAPHIQUES

La théorie des cycles réels est présentée dans Blanchard et Fischer (1989), chapitre 7 ; la section 2 du chapitre s'inspire de la section 7.1 de ce manuel. Les équilibres du modèle de Lucas (1972) qui ont été construits dans la section 3.2.2 ont été décrits dans Azariadis (1980) et Chiappori et Guesnerie (1990).

CHAPITRE 10

Anticipations et fluctuations

1. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons cherché à rendre compte des fluctuations économiques en supposant qu'elles correspondaient à une réponse (optimale) de l'économie à des chocs exogènes affectant la technologie des entreprises, les préférences individuelles ou la politique économique de l'État. Nous avons été amené à conclure que cette explication ne permettait pas de rendre compte à elle seule des fluctuations économiques de moyen terme, celles qui correspondent aux « cycles des affaires ». Nous allons voir dans ce chapitre que, contrairement aux postulats du courant des cycles réels, l'économie peut fluctuer spontanément, au sens où des fluctuations peuvent apparaître en l'absence de perturbations exogènes. Ce sont cette fois les anticipations, les croyances des agents, qui sont la source des fluctuations. Comme dans le chapitre précédent, nous imposerons dans un premier temps l'hypothèse d'anticipations rationnelles, en la regardant comme un garde-fou ; on devine que l'on disposerait d'un très grand nombre de degrés de liberté si les anticipations étaient laissées quelconques.

En même temps, cette hypothèse est *a priori* très forte. Si tous les agents ont accès au même ensemble d'informations, elle impose en particulier que tous forment leurs anticipations de la même façon. On peut penser qu'une telle homogénéité n'est pas anodine, au moins lorsque l'on s'intéresse aux fluctuations : le fait que tous les agents aient des croyances identiques pourrait tendre à favoriser l'émergence de fluctuations ; au contraire, une plus grande diversité des croyances pourrait avoir un effet de lissage, les anticipations plutôt optimistes étant contrebalancées par des anticipations plutôt pessimistes. On conclura ce chapitre en relâchant l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Ce relâchement nous permettra d'illustrer certaines conséquences

de l'hétérogénéité des croyances ; notamment, de discuter l'effet stabilisateur de l'hétérogénéité des croyances. Il nous permettra aussi, plus fondamentalement, de tester la robustesse de cette hypothèse.

2. FLUCTUATIONS ENDOGÈNES D'ÉQUILIBRE

2.1. Fluctuations endogènes déterministes

Est-il possible que l'économie fluctue, alors qu'aucun choc, réel ou monétaire, ne vient la perturber ?

Pour le savoir, considérons une version simple du modèle à générations imbriquées avec monnaie dans laquelle les jeunes travaillent et produisent y_t biens périssables à partir de $l_t = y_t$ unités de travail. Les rendements étant constants, ils obtiennent en contrepartie un salaire nominal $p_t y_t$ qu'ils consomment en seconde période de vie (p_t représente le salaire nominal par unité de travail).

Formellement, ils choisissent (y_t, c_{t+1}) qui maximise

$$u(c_{t+1}) - v(y_t),$$

où $u' > 0$, $u'' < 0$, $v' > 0$ et $v'' > 0$. Les deux contraintes de budget auxquelles ils font face sont :

$$M_t = p_t y_t,$$

$$p_{t+1} c_{t+1} = M_t.$$

Soit

$$y_t = y\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)$$

l'offre de biens en t. Le rapport p_{t+1}/p_t est le prix relatif du bien de consommation par rapport au loisir (c'est aussi l'inverse du salaire réel anticipé).

La réaction des agents à une hausse de ce rapport passe, comme d'habitude, par deux effets éventuellement opposés. Il y a, d'une part, l'effet de substitution : lorsque le prix relatif du bien de consommation (future) baisse (ou bien encore, le salaire réel anticipé augmente), les agents jeunes décident de consommer plus de biens et moins de loisir, c'est-à-dire de travailler plus, ce qui conduit à une hausse de la production courante. D'autre part, il y a un effet de revenu : lorsque le prix relatif du bien de consommation (future) baisse, le pouvoir d'achat des agents jeunes augmente ; ils consomment plus de biens et plus de loisir, relâchent donc leur effort de production, et ainsi la production baisse.

La réaction de l'offre de travail et de la production à une hausse du salaire réel p_t/p_{t+1} est donc ambiguë : ces deux grandeurs augmentent si l'effet de substitution est dominant, et diminuent si l'effet de revenu est dominant. Par contre, la consommation anticipée est toujours croissante avec le salaire réel.

De leur côté, les agents vieux demandent une quantité de biens égale à leur encaisse réelle.

Les comportements étant décrits, nous pouvons maintenant décrire l'équilibre intertemporel (avec prévisions parfaites). Il y a deux marchés ouverts à chaque date : le marché des biens et le marché de la monnaie. Si tous les marchés étaient équilibrés en $t-1$, la loi de Walras implique qu'ils le sont en t si et seulement si le marché des biens est équilibré à cette date[1].

La demande agrégée de biens émane des vieux : elle est égale à leur encaisse réelle M_{t-1}/p_t (puisque le marché de la monnaie était équilibré en $t-1$). Pour $M_t = \bar{M} = 1$ pour tout t, si le marché de la monnaie était équilibré lors de la période précédente, cette encaisse est égale à $1/p_t$. Aussi, un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites est une suite $(p_t, t \geqslant 0)$ telle que :

$$y\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right) = \frac{1}{p_t}. \tag{10.1}$$

Dans ce qui suit, nous supposerons qu'il existe un prix $p^* < \infty$ solution de cette équation. C'est l'équilibre monétaire stationnaire du modèle de Samuelson.

Notez qu'il n'y a pas de condition initiale asociée à cette suite. Cette équation peut donc être lue de la façon suivante : le prix courant p_t est déterminé par l'anticipation (exacte) du prix futur p_{t+1}. Dans ce cas, c'est le futur qui détermine le présent, et l'on parle d'une « dynamique (regardant) vers l'avant » (*forward looking dynamics*).

L'économie, ici résumée à la dynamique du niveau général des prix, peut-elle fluctuer en l'absence de chocs ? Il est facile d'avoir une première intuition de la réponse. Pour cela, supposons que les agents anticipent en t des prix élevés en $t+1$. Le salaire réel est donc plutôt bas. Si l'effet de revenu est dominant, la production, vue comme une fonction du prix courant, est élevée pour tout prix courant. Il y aura donc une tendance à l'excès d'offre qui se solde, à l'équilibre, par une baisse du prix courant. Réciproquement, sous la même hypothèse que l'effet de revenu est dominant, si les agents jeunes pensent que le prix sera bas demain, il tend à être plutôt élevé aujourd'hui.

Dans ce cas, la dynamique des prix tend à osciller spontanément entre des prix hauts et des prix bas ; ces prix sont prévus parfaitement (il n'y a pas d'erreurs d'anticipation) et aucun choc exogène ne vient perturber l'économie (en particulier, la quantité de monnaie reste constante). Cette dynamique peut même se stabiliser sur un cycle de période deux, défini par deux prix (p_a, p_b) tels que

$$y\left(\frac{p_a}{p_b}\right) = \frac{1}{p_a}, \quad \text{et} \quad y\left(\frac{p_b}{p_a}\right) = \frac{1}{p_b}.$$

Lorsque les agents jeunes anticipent p_a (p_b) pour demain, le prix est p_b (p_a) aujourd'hui.

Mais s'ils avaient anticipé le prix constant p^* tel que $y(1) = 1/p^*$, le prix serait resté constant, égal à p^* lors de chaque période. Ce sont donc les anticipations qui sont la cause des fluctuations : la dynamique de l'économie se conforme à un cycle des prix

1. Vous pouvez adapter l'argument présenté dans le chapitre 3 à cette version du modèle à générations pour le vérifier.

parce que les agents croient qu'elle doit se conformer à ce cycle. On retrouve l'interprétation d'un équilibre à anticipations rationnelles comme une croyance qui s'autoréalise ; ici, il n'y a toutefois aucun aléa exogène. Ces fluctuations sont entièrement endogènes.

L'existence de tels cycles est très simple à étudier ; à ce stade, la figure 1 devrait suffire. Pour la construire, différentions tout d'abord l'équation d'équilibre (10.1). On obtient :

$$\left[y'\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)+\frac{p_{t+1}}{p_t}y\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)\right]dp_t-\frac{p_t}{p_{t+1}}y'\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)dp_{t+1}=0.$$

Comme[1]

$$y'\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)+\frac{p_{t+1}}{p_t}y\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)>0,$$

le théorème des fonctions implicites implique que pour tout p_{t+1} il existe un unique $p_t=\phi(p_{t+1})$ solution de (10.1). Par contre, la réciproque n'est pas toujours vraie, puisque $y'=0$ lorsque l'effet de substitution compense exactement l'effet de revenu. Pour le dire autrement, étant donnée une anticipation de prix, il existe un prix d'équilibre courant p_t solution de (10.1) ; par contre, étant donné un prix courant, il peut ne pas exister d'anticipation de prix qui le justifie, ou il peut en exister plusieurs. Notons que ϕ' est du signe de y' : on a donc $\phi'>0$ si et seulement si l'effet de substitution est dominant (si cet effet est toujours dominant, ϕ^{-1} est bien définie).

Si $1/p_{t+1}\to 0$ alors $y\to 0$ et $1/p_t\to 0$: lorsque le salaire réel est arbitrairement bas, les agents jeunes ne travaillent pas, de sorte que la production (l'offre de biens) est faible, ce qui tend à pousser le prix courant à la hausse. On obtient alors les figures 1 et 2 ; la position de ϕ par rapport à la bissectrice est justifiée dans le paragraphe suivant.

La figure 1 suppose que l'effet de substitution est partout dominant : une hausse du prix anticipé est associée à une hausse du prix courant. Lorsque les agents anticipent un prix supérieur à p^*, les prix augmentent au cours du temps et finissent par exploser alors que la quantité de monnaie reste constante ! L'inflation persiste (s'accroît) au cours du temps, alors que la quantité de monnaie ne varie pas ; souvenez-vous de la version de la théorie quantitative de la monnaie selon laquelle l'inflation a une origine purement monétaire pour voir combien ce résultat en est éloigné ! Intuitivement, on comprend bien ce qui se passe : lorsque le prix anticipé est élevé, c'est-à-dire que le salaire réel anticipé est plutôt bas, les agents jeunes réagissent en travaillant peu, de sorte que l'offre est faible par rapport à la demande, ce qui pousse le prix

1. Nous avons vu plus haut que la consommation anticipée

$$\frac{p_t}{p_{t+1}}y\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)$$

est croissante avec le salaire réel. On a donc :

$$y\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)+\frac{p_t}{p_{t+1}}y'\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right)>0.$$

L'élasticité de l'offre de travail au salaire réel est strictement supérieure à -1.

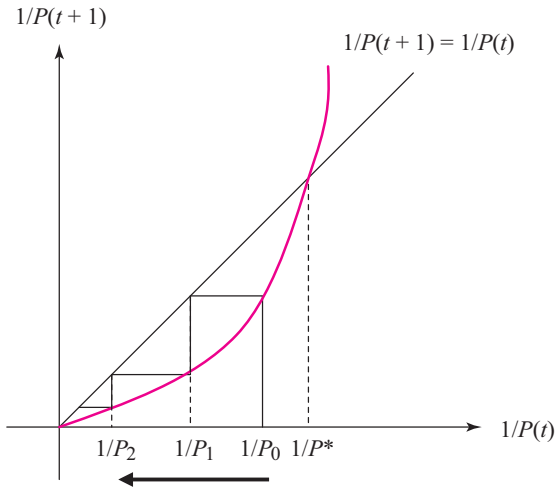


FIGURE 1
Dynamique des prix : effet de substitution dominant

courant à la hausse. Formellement, donnons-nous $p_0 > p^*$. On cherche p_1 tel que $y(p_0/p_1) = 1/p_0$. Pour $y' > 0$, on a :

$$y\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = \frac{1}{p_0} < \frac{1}{p^*} = y(1)$$

$$\Rightarrow \frac{p_0}{p_1} < 1 \Leftrightarrow p_0 < p_1.$$

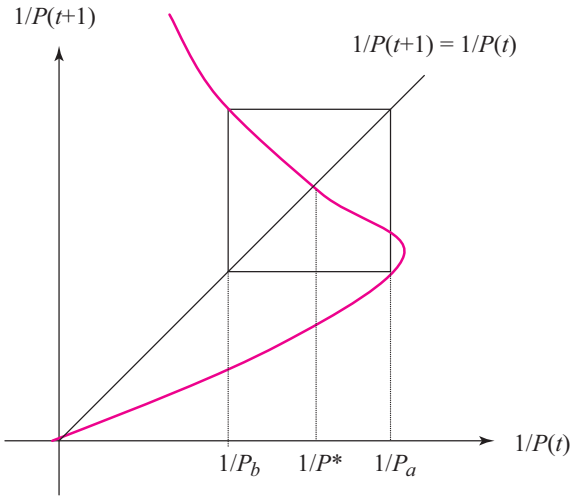


FIGURE 2
Dynamique des prix : effet de revenu dominant

C'est pour cette raison que $\phi(\cdot)$ est située sous la première bissectrice dans la figure 1 pour $p_t > p^*$.

Ce résultat suggère que l'équilibre stationnaire $(p_t = p^*, t \geqslant 0)$ est globalement instable[1]. Cependant, comme nous l'avons remarqué précédemment, il n'est entièrement évident que l'on doive regarder les suites de prix $(p_0, \ldots, p_t, p_{t+1}, \ldots)$ dans le sens naturel d'écoulement du temps. Après tout, c'est parce que les agents anticipent un prix futur que le prix courant se réalise : c'est le futur qui détermine le présent. Il faudrait alors regarder les équilibres comme des suites $(\ldots, p_{t+1}, , p_t, \ldots, p_0)$, auquel cas l'équilibre stationnaire devient globalement stable.

Sur la figure 2, l'effet de revenu l'emporte lorsque $1/p_{t+1}$ est suffisamment grand : lorsque le prix du bien de consommation devient très élevé, les agents finissent par travailler moins. Un cycle de période 2 peut alors émerger.

Remarque 10.1

Le chapitre 8 avait mis l'accent sur l'usage de règles de politique économique pour faire face au problème de crédibilité. On peut également justifier le recours à des règles pour influencer les anticipations des agents : lorsque ces règles sont crédibles, elles sont prises en compte au moment où les agents forment leurs anticipations, et influencent par ce biais la dynamique de l'économie. Pour illustrer ce point, reprenons le modèle précédent, supposons que l'État souhaite stabiliser les fluctuations de prix, par exemple pour que toutes les générations soient traitées par le marché de façon identique. Pour ce faire, l'État annonce qu'il versera un intérêt nominal μ_{t+1} aux vieux en $t+1$. Le salaire réel s'écrit alors

$$\frac{p_t}{p_{t+1}}(1+\mu_{t+1}) = \frac{1+\mu_{t+1}}{1+\pi_{t+1}},$$

et l'offre de travail (ou de biens) en t est une fonction

$$y\left(\frac{1+\mu_{t+1}}{1+\pi_{t+1}}\right).$$

À l'équilibre,

$$y\left(\frac{1+\mu_{t+1}}{1+\pi_{t+1}}\right) = m_t$$

où $m_t = \bar{M}_t/p_t$. Si l'État annonce que le taux de croissance de la masse monétaire est égal au taux d'inflation, alors $\mu_{t+1} = \pi_{t+1}$ et, à l'équilibre, $m_t = y(1)$ pour tout t. Toutes les fluctuations réelles ont donc été éliminées en choisissant une règle qui fixe le salaire réel à 1 pour tout t.

1. Si la production est bornée, par exemple parce que la dotation en heures (de travail) est finie, les suites de prix pour lesquelles $p_0 < p^*$ ne sont pas des équilibres (la production explose).

2.2. Équilibres à taches solaires

Supposons maintenant que les agents jeunes croient que le prix est parfaitement corrélé avec un processus aléatoire exogène, les « taches solaires », qui n'influence pas les fondamentaux de l'économie. Considérons par exemple le cas dans lequel la loi des taches solaires est un processus markovien à deux états a et b. Notons π_{ij} la probabilité que l'état soit j ($j = a, b$) en $t+1$ étant donné que l'état est i ($i = a, b$) en t. On a : $\pi_{ij} = 1 - \pi_{ii}$ pour tout i et $j \neq i$.

Lorsque les agents jeunes observent l'état a en t, ils choisissent leur consommation c^a_{t+1} et c^b_{t+1} dans chacun des deux états solaires et leur production y_t courante. Ce plan maximise

$$\pi_{aa} u(c^a_{t+1}) + \pi_{ab} u(c^b_{t+1}) - v(y_t)$$

sous les deux contraintes

$$p_a c^a_{t+1} = p_t y_t$$

et

$$p_b c^b_{t+1} = p_t y_t.$$

Il s'ensuit que y_t maximise

$$\pi_{aa} u\left(\frac{p_t}{p_a} y_t\right) + \pi_{ab} u\left(\frac{p_t}{p_b} y_t\right) - v(y_t)$$

La solution de ce problème est une fonction d'offre de travail

$$y_t = \tilde{y}\left(\frac{p_t}{p_a}, \frac{p_t}{p_b}, \pi_{aa}\right).$$

De même, lorsqu'ils observent l'état b en t, ils choisissent une offre de travail qui maximise

$$\pi_{ba} u\left(\frac{p_t}{p_a} y_t\right) + \pi_{bb} u\left(\frac{p_t}{p_b} y_t\right) - v(y_t).$$

Soit

$$y_t = \tilde{y}\left(\frac{p_t}{p_b}, \frac{p_t}{p_a}, \pi_{bb}\right)$$

cette offre.

À l'équilibre, l'offre de monnaie, $\bar{M}$, étant toujours normalisée à 1, on a :

$$\tilde{y}\left(\frac{p_t}{p_a}, \frac{p_t}{p_b}, \pi_{aa}\right) = \frac{1}{p_t} \quad \text{si l'état est } a \text{ en } t,$$

et

$$\tilde{y}\left(\frac{p_t}{p_b}, \frac{p_t}{p_a}, \pi_{bb}\right) = \frac{1}{p_t} \quad \text{si l'état est } b \text{ en } t.$$

On peut maintenant définir un équilibre à taches solaires.

Définition 10.1

Un équilibre à taches solaires est une paire de prix (p_a, p_b) *telle que :*

$$\tilde{y}\left(1, \frac{p_a}{p_b}, \pi_{aa}\right) = \frac{1}{p_a}, \tag{10.2}$$

$$\tilde{y}\left(1, \frac{p_b}{p_a}, \pi_{bb}\right) = \frac{1}{p_b}, \tag{10.3}$$

$$p_a \neq p_b. \tag{10.4}$$

Bien sûr, si $p_a = p_b$ alors $p_a = p_b = p^*$; en effet, $\tilde{y}(1,1,\pi) = y(1)$. L'équilibre monétaire stationnaire satisfait (10.2) et (10.3), mais pas (10.4). Pour savoir s'il existe d'autres solutions à (10.2) et (10.3), formons le rapport de (10.2) et (10.3) :

$$F\left(\frac{p_b}{p_a}\right) = \tilde{y}\left(1, \frac{p_a}{p_b}, \pi_{aa}\right) - \frac{p_b}{p_a}\tilde{y}\left(1, \frac{p_b}{p_a}, \pi_{bb}\right) = 0. \tag{10.5}$$

Toute paire (p_a, p_b) satisfaisant (10.2) et (10.3) satisfait aussi (10.5). Réciproquement, si p_a/p_b est solution de (10.5), alors on peut trouver deux nombres (p_a, p_b) qui satisfont (10.2) et (10.3). On cherche donc s'il existe un rapport $p_a/p_b \neq 1$ racine de F.

On peut facilement se convaincre (cf. Azariadis et Guesnerie (1986), lemme 3, pour une démonstration) que l'offre de travail dans l'état b reste bornée supérieurement lorsque le salaire réel p_b/p_a est suffisamment proche de 0. Il s'ensuit que $F(0) > 0$. Réciproquement, l'offre de travail est bornée supérieurement dans l'état a si p_a/p_b est suffisamment proche de 0, ce qui implique que $F(\infty) < 0$.

Une condition suffisante pour qu'il existe une racine p_a/p_b différente de 1 est donc $F'(1) > 0$. Or (cf. Annexe 5.1)

$$F'(1) = -\left[1 + (2 - \pi_{aa} - \pi_{bb})\varepsilon^*\right] y(1),$$

où ε^* est l'élasticité de l'offre de travail par rapport au salaire réel évaluée pour un salaire réel égal à 1 (c'est-à-dire à l'équilibre stationnaire monétaire $p_t = p_{t+1} = p^*$). On en déduit :

$$F'(1) > 0 \Leftrightarrow \varepsilon^* < -\frac{1}{2 - \pi_{aa} - \pi_{bb}}. \tag{10.6}$$

Cette condition sera satisfaite si, lorsque les prix sont proches de l'équilibre stationnaire, une hausse du salaire réel conduit à une baisse suffisamment forte de l'offre de travail.

Intuitivement, si l'on anticipe des prix bas demain, et que l'on réagit en produisant peu aujourd'hui, les prix aujourd'hui sont plutôt élevés. L'économie tend donc à se conformer à un cycle d'ordre deux. Ce cycle s'obtient pour $\pi_{aa} = \pi_{bb} = 0$ (il existe si $\varepsilon^* < -1/2$). Par continuité, pour π_{aa} et π_{bb} suffisamment proches de 0, un équilibre à taches solaires existe aussi dans ce cas.

3. RELÂCHER L'HYPOTHÈSE D'ANTICIPATIONS RATIONNELLES

En un équilibre à anticipations rationnelles, tous les agents ont les mêmes croyances et ces croyances sont validées. Par exemple, en un équilibre à taches solaires, tous les agents croient que le prix est parfaitement corrélé aux taches solaires. De prime abord, cette homogénéité des croyances individuelles est assez peu plausible. De plus, on s'attend à ce que le rôle qu'elle joue dans l'émergence de fluctuations endogènes ne soit pas vraiment anodin : l'économie devrait être moins volatile à l'équilibre si un petit nombre d'agents seulement forment leurs anticipations conditionnellement aux taches solaires, les autres ne croyant pas en leur influence. En ce sens, l'hétérogénéité serait stabilisatrice.

Ces considérations soulèvent deux sortes de questions : (1) les agents sont-ils susceptibles de parvenir à coordonner leurs anticipations sur un équilibre à anticipations rationnelles ? si oui, dans quels cas ? sur quel type d'équilibre (l'équilibre stationnaire monétaire de Samuelson, un cycle de période deux ou un équilibre à taches solaires) ? et (2) l'hétérogénéité des (croyances des) agents est-elle effectivement stabilisatrice ?

3.1. Hétérogénéité et stabilisation

Supposons qu'il existe deux classes d'agents. Les premiers, en proportion α, observent un processus aléatoire à deux états a et b et croient que le prix est égal à p_a dans l'état a et à p_b dans l'état b. Pour simplifier, le processus est supposé cyclique ($\pi_{aa} = \pi_{bb} = 0$). Ainsi, lorsque l'état est a en t, les agents jeunes anticipent que le prix du bien demain sera p_b et leur contrainte de budget intertemporelle s'écrit

$$c_{t+1} = \frac{p_t}{p_b} y_t.$$

Leur production en t ne dépend donc que du salaire réel anticipé p_t/p_b. Soit

$$y_t^1 = y^1\left(\frac{p_t}{p_b}\right),$$

où l'indice 1 vaut pour le type 1 des agents croyant aux taches solaires. De même, lorsque l'état est b en t,

$$y_t^1 = y^1\left(\frac{p_t}{p_a}\right).$$

Les autres agents, de type 2, en proportion $1-\alpha$, ne croient pas en l'influence des taches solaires. Quelles croyances peuvent-ils avoir ? Supposer qu'ils anticipent un prix constant conduirait presque immédiatement à invalider les croyances de l'un des deux types. Aussi, on supposera qu'ils croient (à tort) que le prix est égal à p_a avec la probabilité $1/2$ et p_b avec la probabilité $1/2$. Ainsi, les jeunes agents de ce type choisissent en t leur consommation c_{t+1}^a si l'état a se réalise en $t+1$, leur consommation c_{t+1}^b si l'état b se réalise en $t+1$, et leur offre de travail (leur production) courante. Ces trois variables maximisent

$$\frac{1}{2}u\left(c_{t+1}^a\right) + \frac{1}{2}u\left(c_{t+1}^b\right) - v(y_t)$$

sous les deux contraintes

$$c_{t+1}^a = \frac{p_t}{p_a} y_t,$$

et

$$c_{t+1}^b = \frac{p_t}{p_b} y_t.$$

Leur production optimale est donc indépendante de l'état courant, et dépend des deux salaires réels p_t/p_a et p_t/p_b. On note leur fonction d'offre de biens

$$y_t^2 = y^2\left(\frac{p_t}{p_a}, \frac{p_t}{p_b}\right).$$

À l'équilibre, l'offre agrégée est égale à la demande sur le marché du bien de consommation. L'offre agrégée de biens en t est égale à

$$\alpha y^1\left(\frac{p_t}{p_b}\right) + (1-\alpha) y^2\left(\frac{p_t}{p_a}, \frac{p_t}{p_b}\right)$$

si l'état est a en t. Elle dépend bien de l'état courant, a, puisque les agents de type 1 font varier leur comportement d'offre avec cet état : ils tiennent pour certain que le prix sera p_b demain. De même, l'offre est

$$\alpha y^1\left(\frac{p_t}{p_a}\right) + (1-\alpha) y^2\left(\frac{p_t}{p_a}, \frac{p_t}{p_b}\right)$$

si l'état est b en t.

La demande agrégée émane des vieux, qui possèdent $\bar{M} = 1$ unité de monnaie au total. Elle est égale à $1/p_t$.

Pour que les croyances ne soient pas invalidées, le prix courant doit être p_a si l'état est a en t, et p_b sinon. Soit :

$$\alpha y^1\left(\frac{p_a}{p_b}\right) + (1-\alpha) y^2\left(1, \frac{p_a}{p_b}\right) = \frac{1}{p_a}, \tag{10.7}$$

$$\alpha y^1\left(\frac{p_a}{p_b}\right) + (1-\alpha) y^2\left(\frac{p_b}{p_a}, 1\right) = \frac{1}{p_b}. \tag{10.8}$$

En un tel équilibre, les anticipations de prix des agents de type 1 sont exactes ; celles des agents de type 2 ne sont qu'en moyenne exactes. Mais, étant donnés les *a priori* respectifs des deux types d'agents, aucune de ces deux croyances ne devrait être remise en cause.

La même méthode que celle que nous avons utilisée dans la section précédente pour étudier l'existence des équilibres à taches solaires peut être appliquée ici. Il est facile de vérifier qu'il existe deux prix p_a et p_b différents, solution de (10.7) et (10.8), si

$$\varepsilon^* < -\frac{1}{1+\alpha}. \tag{10.9}$$

Le membre de droite est décroissant avec α. Lorsque $\alpha = 0$, personne ne croit en l'influence des taches solaires, et la condition (10.9) n'est jamais satisfaite (puisque $\varepsilon^* \geqslant -1$). En fait, puisque

$$y^2\left(1, \frac{p_a}{p_b}\right) = y^2\left(\frac{p_b}{p_a}, 1\right),$$

on a nécessairement, lorsque $\alpha = 0$, $p_a = p_b$ par (10.7) et (10.8). En ce sens, l'hétérogénéité est effectivement stabilisatrice : les prix sont identiques lorsque la proportion d'agents qui ne croient pas aux taches solaires est suffisamment grande.

Cependant, dans un autre sens, les fluctuations de prix elles-mêmes peuvent être plus marquées lorsque l'hétérogénéité est prise en compte. Pour le comprendre, notons que les deux équations (10.7) et (10.8) définissent implicitement p_a et p_b en fonction de α. Prenons $p_a < p_b$ par définition. Lorsqu'un cycle d'ordre deux existe pour $\alpha = 1$, une petite baisse de la proportion α en-dessous de 1 peut conduire à une hausse de la différence $p_b - p_a$, amplifiant cette fois les fluctuations.

L'intuition est simple. Deux effets sont à l'œuvre :

1. Étant données les anticipations de prix, une baisse de la proportion d'agents de type 1 réduit l'écart qui subsiste entre l'offre agrégée de bien dans les deux états, et pour cette raison est plutôt stabilisatrice. Pour $p_a < p_b$, le prix p_a a tendance à augmenter et p_b à diminuer.
2. Les anticipations de prix étant affectées, l'offre agrégée doit changer à nouveau. Plaçons-nous par exemple dans l'état a. Le salaire réel anticipé par les agents de type 1, p_t/p_b, augmente. Si l'effet de substitution est dominant au point p_a/p_b (comme dans la figure **??**), l'offre agrégée augmente, ce qui exerce une pression à la baisse sur le prix dans l'état a. D'un autre côté, un faible effet de revenu au point p_b/p_a (l'effet de revenu est dominant en ce point) implique cette fois que l'offre agrégée change peu dans l'état b. L'écart entre p_a et p_b s'est donc accru.

Au total, lorsque l'on introduit une certaine diversité des croyances individuelles, il devient moins vraisemblable que des fluctuations persistent au cours du temps, mais ces fluctuations peuvent être plus prononcées.

3.2. Justifier la perfection des prévisions

Cette section a pour objet d'illustrer la proposition suivante : l'hypothèse d'anticipations rationnelles est plus pertinente lorsque l'économie est peu sensible aux anticipations.

Exemple 10.1

Reprenons la même version du modèle à générations imbriquées que dans les sections précédentes. Supposons que les jeunes ont une anticipation de prix commune p^e_{t+1} qui n'est pas nécessairement exacte. Le prix d'équilibre courant est tel que :

$$y\left(\frac{p_t}{p^e_{t+1}}\right) = \frac{1}{p_t},$$

ou bien encore, dans le voisinage de l'équilibre monétaire stationnaire p^*,

$$dp_t - \frac{\varepsilon^*}{1+\varepsilon^*} dp^e_{t+1} = 0.$$

Le rapport $-\varepsilon^*/(1+\varepsilon^*)$ représente le poids (relatif) des anticipations sur le système. Pour décrire la dynamique de l'économie, il faut spécifier comment les agents forment leurs anticipations. Supposons que $p^e_{t+1} = p_{t-1}$. Alors, on a :

$$dp_t - \frac{\varepsilon^*}{1+\varepsilon^*} dp_{t-1} = 0.$$

Les agents finiront par découvrir le prix p^* si et seulement si $|\varepsilon^*/(1+\varepsilon^*)| < 1$, c'est-à-dire lorsque le système économique est peu sensible aux anticipations. Cette condition est toujours satisfaite si $\varepsilon^* \geqslant 0$. Lorsque $-1 < \varepsilon^* < 0$, elle l'est si et seulement si $\varepsilon^* > -1/2$; cette inégalité est liée à l'existence de cycles de période 2 : lorsque l'équilibre monétaire stationnaire est localement instable dans la dynamique avec apprentissage (myope), il existe un cycle de prix de période 2. □

Le reste de cette section approfondit cette première intuition.

3.2.1. Le modèle de Muth

Il y a un continuum de producteur $i \in [0,1]$. Chacun doit choisir sa production une période avant de mettre son produit sur le marché. C'est le cas dès lors que le processus de production demande du temps. Il doit donc anticiper le prix auquel il pourra écouler sa production. Soit p^e_i le prix anticipé par le producteur i. Cette anticipation de prix est pour l'instant supposée ponctuelle. Le profit anticipé par ce producteur s'écrit donc :

$$p^e_i q_i - c_i(q_i),$$

lorsqu'il décide de produire q_i. Pour une fonction de coût croissante et convexe, la production choisie satisfait la condition du premier ordre :

$$q_i = c_i'^{-1}(p^e_i) = s_i(p^e_i)$$

où s_i représente la fonction d'offre de i. La production agrégée est égale à

$$Q^s = \int_i q_i di = \int_i s_i(p^e_i) di.$$

On supposera que le prix effectif assure l'égalité entre l'offre et la demande agrégée. En notant $D(p)$ la fonction de demande agrégée, avec $D' < 0$, le prix effectif est tel que :

$$D(p) = \int_i s_i(p^e_i) di$$

$$\Leftrightarrow p = D^{-1}\left(\int_i s_i(p^e_i) di\right). \tag{10.10}$$

Le prix p est appelé un *équilibre temporaire* : c'est le prix d'équilibre étant données des anticipations arbitraires des producteurs.

Pour savoir quel prix est susceptible de survenir, il faut spécifier les anticipations de prix. Jusqu'à présent, nous avons considéré le cas particulier des anticipations parfaites, ou exactes. Il s'agit ici d'un prix p^* tel que

$$p^* = D^{-1}\left(\int_i s_i(p^*)di\right). \tag{10.11}$$

En d'autres termes, lorsque tous les producteurs anticipent le prix p^*, le prix effectif est bien égal à p^*. Étant données les hypothèses de monotonie des fonctions d'offre et de demande, ce prix est unique s'il existe, et des conditions aux bords (il existe un excès de demande si le prix est bas et un excès d'offre s'il est élevé) nous assurent que ce prix existe. Le prix p^* coïncide avec le prix d'équilibre walrassien : si tous les producteurs pouvaient choisir leur production au moment où ils la mettent sur le marché, c'est le prix qui égaliserait l'offre et la demande agrégée.

Anticiper un tel prix est habituellement justifié de la façon suivante : les agents connaissent le modèle de l'économie. Ici, ce modèle est défini par les fondamentaux (la fonction de demande agrégée et les fonctions de coût des producteurs) et l'hypothèse de rationalité des comportements individuels. Ceci n'est clairement pas suffisant pour justifier la rationalité des anticipations, puisqu'on ne peut en déduire que la fonction d'offre des autres, c'est-à-dire la fonction qui associe les anticipations de prix à l'offre, mais pas l'offre elle-même. En fait, chaque producteur anticipe le prix p^* uniquement s'il est convaincu que les autres producteurs se comportent rationnellement et anticipent eux aussi ce prix. Et ceci doit être vrai pour tous les producteurs ...

3.3. Découvrir l'équilibre

3.3.1. Apprentissage adaptatif

Une façon naturelle de justifier l'anticipation de prix p^* consiste à en faire le résultat d'un processus d'essais et d'erreurs au chapitre duquel les producteurs ont anticipé certains prix dans le passé, commis des erreurs d'anticipation, constaté ces erreurs et révisé leurs anticipations en fonction de ce qu'ils observaient.

Un tel processus d'apprentissage est caractérisé par une règle d'anticipation qui lie l'ensemble des informations dont dispose chaque producteur au moment où il doit former ses anticipations, par exemple les prix réalisés passés et ses anticipations de prix passées, à son anticipation de prix. La règle la plus simple que l'on puisse envisager est une règle d'apprentissage *myope*, selon laquelle le prix que le producteur i anticipe à la date $t-1$, à propos du prix de la date suivante, t, et une fois observé le prix courant p_{t-1} est :

$$p^e_{it} = p_{t-1}.$$

Une autre règle fréquente est celle de l'apprentissage adaptatif,

$$p^e_{it} = p^e_{it-1} + \alpha\left(p_{t-1} - p^e_{it-1}\right),$$

avec $\alpha > 0$. Lorsque le producteur i constate qu'il a sous-estimé le prix ($p_{t-1} - p^e_{it-1} > 0$), il ajuste sa dernière anticipation de prix à la hausse.

Plus généralement,

$$p^e_{it} = \psi_i(p_{t-1}, p^e_{it-1}, ...) \tag{10.12}$$

représente la *fonction d'anticipation* de i. L'imposition de propriétés particulières à la fonction ψ revient à préciser les figures que le producteur peut reconnaître : si le prix est resté constant, l'anticipation de prix est égale à ce prix ; s'il a suivi un cycle d'ordre deux, l'anticipation de prix se conforme à cette évolution, ; si la variable a crû à un taux de croissance constant, les producteurs peuvent prolonger la tendance ; etc.

Exemple 10.2

Considérons la fonction d'anticipation

$$p^e_{t+1} = \psi(p_t, p_{t-1}, ..., p_{t-L}),$$

où L peut être interprété comme la mémoire du producteur. Dans le voisinage du prix p^*, on a

$$p^e_{t+1} - p^* = \sum_{l=0}^{L} \psi^*_l (p_{t-l} - p^*), \tag{10.13}$$

où ψ^*_l est la dérivée partielle de ψ par rapport au prix p_{t-l} et calculée au point $p_t = p_{t-1} = \cdots = p^*$. Un agent doté de cette fonction d'anticipation reconnaît des suites de prix constantes proches de p^* si

$$1 = \sum_{l=0}^{L} \psi^*_l .$$

Alors, si le prix est resté constant dans le passé, disons égal à p (proche du prix p^*), l'agent anticipe que le prix restera égal à p demain. Il reconnaît des séries de prix s'écartant de p^* au taux g si

$$g^{L+1} = \sum_{l=0}^{L} \psi^*_l g^{L-l}.$$

Plus généralement, les racines du polynôme caractéristique associé à (10.13) nous renseignent sur les figures que l'agent est prêt à reconnaître (cf. Grandmont, 1998). □

La dynamique d'équilibre temporaire, ou dynamique avec apprentissage, s'obtient en réinjectant (10.12) dans (10.10) :

$$p_t = D^{-1}\left(\int_i s_i(\psi_i(p_{t-1}, p^e_{it-1}, ...))di\right).$$

Prenons à titre d'exemple la règle d'apprentissage myope et examinons les propriétés de stabilité locale de l'équilibre avec prévisions parfaites. La dynamique avec apprentissage s'écrit

$$p_t = D^{-1}\left(S(p_{t-1})\right)$$

où S représente la fonction d'offre agrégée. Dans le voisinage de p^*, elle s'écrit :

$$(p_t - p^*) = \frac{S'(p^*)}{D'(p^*)}(p_{t-1} - p^*).$$

Ce schéma est compatible avec le « cycle du porc » : comme $S'/D' < 0$, on a

$$p_t - p^* < 0 \Leftrightarrow p_{t-1} - p^* > 0.$$

Le prix d'équilibre temporaire oscille autour de l'équilibre walrassien p^*. Il est facile de comprendre pourquoi : lorsque le prix est bas aujourd'hui, les producteurs pensent qu'il sera bas demain, offrent peu, de sorte que l'on observe plutôt un excès de demande, et le prix est en fait élevé !

L'équilibre avec prévisions parfaites p^* sera localement stable dans la dynamique avec apprentissage si et seulement si

$$\left|S'(p^*)/D'(p^*)\right| < 1,$$

c'est-à-dire $-1 < S'(p^*)/D'(p^*) < 0$. Cette condition est la condition de stabilité dans le modèle de Cobweb. Elle fait sens : lorsque $\left|S'(p^*)/D'(p^*)\right|$ est petit, l'offre est relativement peu sensible aux anticipations des producteurs individuels. *Le prix d'équilibre p^* est donc localement stable si, en un sens, le système réagit peu aux anticipations individuelles.* Il est localement instable sinon, validant l'idée intuitive selon laquelle les anticipations sont déstabilisantes.

La myopie supposée ci-dessus est extrême. Si la convergence ne se fait pas, ou ne se fait pas suffisamment rapidement, les producteurs devraient finir par comprendre que le mode de formation des anticipations retenu est en partie responsable de leurs erreurs, et changer de schéma d'apprentissage. L'ajustement est toutefois complexe : je sais que si tout le monde anticipe un certain prix, alors c'est en fait tel autre prix qui va se réaliser ; c'est celui que j'anticipe. Mais si je sais que tous les autres font comme moi, j'anticipe un nouveau prix, etc. Le critère correspondant est celui de la « E-stabilité » (*Expectational stability*) popularisé par DeCanio (1979). On a :

$$p^e_{t+1} = D^{-1}\left(\int_i s_i(p^e_t)\,di\right)$$

$$\Rightarrow (p^e_{t+1} - p^*) = \frac{S'(p^*)}{D'(p^*)}(p^e_t - p^*).$$

La condition de stabilité locale correspondant à un comportement d'anticipation assez sophistiqué est identique à celle obtenue pour un apprentissage myope. Et à nouveau, elle est localement stable si le système réagit peu aux anticipations individuelles.

3.3.2. Apprentissage divinatoire

Pour interpréter les conditions de stabilité, adoptons un point de vue légèrement différent sur la façon dont les agents se comportent, dans lequel l'apprentissage ne dépend plus des observations passées mais d'un raisonnement fait par chaque producteur. Supposons que les producteurs jouent un jeu dans lequel leurs stratégies sont des anticipations de prix et leurs paiements sont d'autant plus grands qu'ils anticipent correctement le prix, par exemple

$$\frac{1}{2}(p - p_j^e)^2$$

pour le producteur j. Si le producteur j connaît le modèle de l'économie, il sait que le prix est finalement déterminé selon (10.10). Il va donc choisir

$$p_j^e = D^{-1}\left(\int_i s_i(p_i^e)\,di\right)$$

lorsqu'il croit que les prix anticipés par les autres sont $(p_i^e, i \in [0,1])$. On peut interpréter cette fonction comme une fonction de réaction. Un équilibre de Nash est le prix p^* : si tous les autres producteurs anticipent p^*, le producteur j a intérêt à anticiper p^*. Cependant, cette justification n'est pas suffisante : le producteur j anticipe p^* parce qu'il croit que tous les autres croient que tous les autres anticipent p^*. Et ceci *ad infinitum*. On dit que l'anticipation du prix p^* est compatible avec la connaissance commune (CK, pour *Common Knowledge*) que chacun anticipe p^*.

Remarque 10.2 L

e gain du producteur est son profit, et non pas une fonction de l'erreur d'anticipation. Lorsqu'il anticipe p_i^e il produit $q_i = s_i(p_i^e)$. Son profit effectif est $p_i s_i(p_e^i) - c_i\left(s_i(p_e^i)\right)$. La fonction s_i est croissante ; le profit ex post, lorsque p_i se réalise, est maximal pour $q_i = s_i(p_i)$. La concavité du profit avec la quantité implique que le profit est d'autant plus grand que l'erreur d'anticipation commise est faible, c'est-à-dire que $s_i(p_e^i)$ est proche de $s_i(p_i)$.

Supposons maintenant qu'il soit CK que chacun anticipe dans un segment de prix $P_0 = \left[p_0^{\max}, p_0^{\min}\right]$ comprenant p^* (et non plus exactement égal à p^*). Si le modèle est CK et que chaque producteur sait que chaque autre producteur est rationnel, chaque producteur sait que l'offre individuelle est comprise entre $s_i(p_0^{\inf})$ et $s_i(p_0^{\sup})$ pour tout (autre producteur) i, et donc que l'offre agrégée est comprise entre $S(p_0^{\inf})$ et $S(p_0^{\sup})$. La connaissance du modèle, ici la fonction de demande agrégée, implique que chaque producteur sait que le prix effectif va satisfaire :

$$p \in P_1 = \left[D^{-1}(S(p_0^{\sup})), D^{-1}(S(p_0^{\inf}))\right].$$

Ce que l'on note

$$p \in P_1 = D^{-1}(S(P_0)).$$

Mais chaque joueur sait maintenant que chaque autre sait que le prix sera dans l'intervalle P_1. Les mêmes déductions peuvent être tirées de cette restriction : le prix est en fait dans un nouvel intervalle $P_2 = D^{-1}(S(P_1))$. Et plus généralement :

$$P_t = D^{-1}(S(P_{t-1})).$$

Supposons maintenant que P_0 soit proche de p^*. Alors le processus de déductions décrit converge localement vers p^*, c'est-à-dire $\lim p_t^{\inf} = \lim p_t^{\sup} = p^*$ quand $t \to \infty$ si et seulement si $D^{-1}(S(\cdot))$ est localement contractante, c'est-à-dire à nouveau $\left|S'(p^*)/D'(p^*)\right| < 1$. On comprend un peu mieux les conditions de stabilité locale : *lorsque les anticipations influencent peu le comportement individuel, il est plus facile pour chacun de prédire le comportement des autres, et ainsi le prix qui va survenir.*

4. CONCLUSION

Qu'avons-nous appris ? D'abord que les anticipations sont elles aussi une source de fluctuations. En même temps, les conditions sous lesquelles ces fluctuations perdurent, au moins dans les exemples simples utilisés dans ce chapitre, sont empiriquement peu plausibles (notamment au travers de la nécessaire importance de l'effet revenu). Comme pour le courant des cycles réels, des efforts ont été faits pour utiliser un cadre plus pertinent (cf. Benhabib et Farmer, 1999), tout en conservant l'hypothèse d'anticipations rationnelles, mais ils ne sont pas toujours concluants.

D'autres critères que l'apprentissage auraient pu être utilisés pour justifier l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Un critère de multiplicité (*indétermination*) est souvent invoqué : lorsqu'il existe plusieurs équilibres, on peut penser qu'il sera plus difficile pour les producteurs de se coordonner *a priori* sur l'un d'entre eux.

En fait, indétermination, existence d'équilibres à taches solaires et instabilité de l'apprentissage sont trois critères très étroitement liés. L'hypothèse de rationalité des anticipations serait plus pertinente lorsque les anticipations influencent peu l'économie : alors, l'équilibre peut être découvert au terme d'un processus d'apprentissage, il est (localement) unique, et il n'existe pas d'équilibre à taches solaires à proximité.

5. ANNEXE

5.1. Élasticités de l'offre de travail

Considérons tout d'abord le problème déterministe. L'offre de travail optimale est telle que :

$$\frac{p_t}{p_{t+1}} u'\left(\frac{p_t}{p_{t+1}} l_t\right) - v'(l_t) = 0.$$

En différentiant cette expression à l'équilibre stationnaire $p_t = p_{t+1} = p^*$, on obtient :

$$d l_t = -\frac{u'(l^*) + l^* u''(l^*)}{u''(l^*) - v''(l^*)} d\left(\frac{p_t}{p_{t+1}}\right),$$

où $l^* = y(1)$. Considérons maintenant le problème stochastique. Supposons que le prix du bien soit p_a dans l'état a. Alors, l'agent doit choisir une quantité de travail l_t telle que :

$$\pi_{aa}u'(l_t) + \pi_{ab}\frac{p_a}{p_b}u'\left(\frac{p_a}{p_b}l_t\right) - v'(l_t) = 0.$$

En différentiant cette expression à l'équilibre stationnaire $p_a = p_b = 0$, on obtient

$$dl_t = -\pi_{ab}\frac{u'(l^*) + l^*u''(l^*)}{u''(l^*) - v''(l^*)}d\left(\frac{p_a}{p_b}\right).$$

En notant ε^* l'élasticité de l'offre de travail au salaire réel p_t/p_{t+1} du problème déterministe, et η_a^* cette élasticité pour le problème stochastique, lorsque l'état est a, et toutes deux évaluées à l'équilibre stationnaire p^*, on a :

$$\eta_a^* = (1 - \pi_{aa})\varepsilon^*.$$

De même, $\eta_b^* = (1-\pi_{bb})\varepsilon^*$. On en déduit facilement l'expression de $F'(1)$ donnée dans le texte.

6. EXERCICES ET PROBLÈMES

6.1. Stabilité et liquidité

La crise financière récente s'est traduite par une brusque contraction du crédit, notamment à partir de la faillite de Lehman Brothers en septembre 2008. Les contraintes de liquidité auxquelles font face les ménages sont sans doute devenues plus prégnantes : les ménages ont dû financer une plus grande partie de leurs achats au comptant au moyen d'une encaisse monétaire préalablement constituée. L'objectif de ce problème est de discuter dans quelle mesure ces contraintes contribuent à l'instabilité de l'économie. Une intuition simple suggère que, le comportement des agents ne pouvant plus être aussi volatile qu'auparavant, leurs croyances seront moins susceptibles d'influencer les comportements individuels et par là-même la dynamique agrégée de l'économie.

Afin de se faire une première idée sur cette assertion, on s'inspire d'un exemple de Michel et Wigniolle (2005), Cash-in-advance constraints, bubbles and monetary policy, *Macroeconomic Dynamics* 9, 28-56. On considère une économie stylisée dans laquelle les agents vivent deux périodes consécutives. Le taux de croissance démographique n est constant. On a $N_t = (1+n)N_{t-1}$ où N_t représente le nombre d'agents nés en t. Chaque agent consomme lors de ses deux périodes de vie, mais travaille uniquement durant la première. On notera c_{1t} (resp. c_{2t}) la consommation d'un agent jeune (resp. vieux) en t, et $w_t\ell_t$ le salaire réel perçu en t par un agent qui travaille ℓ_t unités de temps. Le temps disponible pour travailler est limité : $\ell_t \leqslant 1$ pour tout t. Pour transférer son revenu d'une période sur l'autre, deux actifs sont disponibles : la monnaie et le capital. On notera m_t l'encaisse réelle d'un agent né en t, et s_t son épargne sous forme de capital. Le taux d'inflation est π_t en t (c'est le taux de croissance du niveau

général des prix entre $t-1$ et t). Le taux d'intérêt réel est r_t en t. Enfin, on supposera qu'au moins une partie μ ($0 \leqslant \mu < 1$) de la dépense d'un agent vieux doit être financée par une encaisse monétaire qu'il détient au début de sa seconde période de vie : il s'agit d'une contrainte de liquidité.

On supposera que les préférences d'un agent né en t peuvent être représentées par la fonction d'utilité $u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$.

1. Écrivez les contraintes auxquelles un agent né en t fait face.
2. Supposons que la contrainte de liquidité est saturée.
   - 2.1. Écrivez la contrainte de budget intertemporelle à laquelle un agent né en t fait face. Vous noterez
     $$\frac{1}{1+\rho_{t+1}} \equiv \mu\,(1+\pi_{t+1}) + \frac{1-\mu}{1+r_{t+1}}.$$
     Que représente le paramètre ρ_{t+1} ?
   - 2.2. Soit $m_t + s_t = \sigma(w_t, \rho_{t+1})$ l'épargne réelle choisie à l'optimum par un agent né en t. Quelle inégalité r_{t+1} et π_{t+1} doivent-ils satisfaire pour qu'un tel agent accepte de détenir une épargne sous forme de capital ($s_t \geqslant 0$) ?
   - 2.3. La fonction de production est néoclassique. Montrez que la maximisation du profit implique que $r_t = r(k_t)$ et $w_t = w(k_t)$ où k_t est le stock de capital par tête en t, et exprimez $r(\cdot)$ et $w(\cdot)$ en fonction de la production par tête $f(k_t)$.
   - 2.4. On supposera que les prix équilibrent les marchés ouverts lors de chaque période. Écrivez l'égalité offre-demande sur le marché du capital en t en fonction de $\sigma(\cdot)$, m_t et k_{t+1}.
   - 2.5. L'offre de monnaie est supposée constante, égale à $\bar{M}$. Écrivez l'égalité offre-demande sur le marché de la monnaie en t en fonction de m_t, π_{t+1} et m_{t+1}. Montrez que cette égalité peut se réécrire
     $$\left(1-\mu\right) m_{t+1} = \mu(1+r_{t+1})\,k_{t+1}.$$
   - 2.6. Écrivez ρ_{t+1} en fonction de μ, m_t, r_{t+1} et k_{t+1}.
   - 2.7. Montrez que l'inégalité obtenue en 2.2. s'écrit $\left(1-\mu\right) m_t \geqslant \mu(1+n)\,k_{t+1}$.
   - 2.8. Définissez un équilibre intertemporel (concurrentiel) avec prévisions parfaites de cette économie, dans lequel la contrainte de liquidité est saturée lors de chaque période.
   - 2.9. Montrez que l'évolution du stock de capital par tête est gouvernée à l'équilibre par une équation de récurrence du premier ordre que vous donnerez.
   - 2.10. Caractérisez le stock de capital stationnaire. Montrez que, pour $\mu = 0$, $k = 0$ et $k = k^d$ (où k^d est le stock de capital par tête de Diamond) sont des équilibres stationnaires. Montrez que l'inégalité obtenue en 2.7 est satisfaite à l'équilibre de Diamond si et seulement si ce dernier est dynamiquement efficace. En utilisant le théorème des fonctions implicites, donnez une condition suffisante pour que, lorsque μ est proche de 0, il existe

un équilibre stationnaire de l'économie où le stock de capital par tête est proche de k^d.

2.11. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre stationnaire obtenu en 2.10 soit localement stable. Vous supposerez que l'effet de substitution est dominant ($\sigma'_\rho \geqslant 0$).

2.12. Montrez que si l'équilibre de Diamond est dynamiquement efficace et localement stable, une hausse de μ s'accompagne d'une baisse du stock de capital par tête stationnaire. Commentez.

2.13. Discutez l'effet (dé)stabilisant de la présence de la contrainte de liquidité.

3. La suite du problème est indépendante des questions 2.9 à 2.13. Supposons maintenant que la contrainte de liquidité n'est pas saturée. Montrer qu'alors $m_t + s_t = \sigma(w_t, r_{t+1})$. Définissez un équilibre intertemporel de cette économie, si la contrainte de liquidité n'est jamais saturée. Quels en sont les équilibres stationnaires ? Concluez sur le rôle joué par une contrainte de liquidité, même peu exigeante (μ est petit) sur la relation unissant l'efficacité dynamique et l'existence d'un équilibre monétaire.

4.1. Supposons que les agents anticipent en t que (1) la contrainte de liquidité sera active lors de la période suivante, et (2) on aura $m_{t+1} = m_2$ et $k_{t+1} = k_2$ (où m_2 et k_2 sont deux valeurs, pour l'instant quelconques). Quelles sont les deux valeurs (m_t, k_t) d'équilibre lors de la période courante ?

4.2. Supposons maintenant que les agents anticipent en t que (1) la contrainte de liquidité ne sera pas active lors de la période suivante, et (2) on aura $m_{t+1} = m_1$ et $k_{t+1} = k_1$ (où m_1 et k_1 sont deux valeurs, pour l'instant quelconques). Quelles sont les deux valeurs (m_t, k_t) d'équilibre lors de la période courante ?

4.3. Définissez alors un équilibre avec prévisions parfaites dans lequel l'économie se trouve alternativement dans le régime où la contrainte de liquidité est saturée et dans celui où elle ne l'est pas, et où (m_t, k_t) suit un cycle de période deux $((m_1, k_1), (m_2, k_2)$.

4.4. Dans ce qui suit, on considère pour simplifier le cas où les préférences individuelles sont Cobb-Douglas : $u(c) = \ln c$. À quoi est égale $\sigma(w, \rho)$? Après avoir substitué (m_1, m_2), écrivez le système de deux équations qui définit (k_1, k_2).

4.5. Remarquez que $k_1 = k_2 = k^d$ est solution au point $\mu = 0$. Supposons μ suffisamment petit, mais différent de 0. Utilisez à nouveau le théorème des fonctions implicites pour étudier l'existence d'une solution (k_1, k_2) où k_1 et k_2 sont proches de k^d : montrez qu'une telle solution existe si k^d est dynamiquement efficace et localement stable. Qu'en concluez-vous finalement sur l'effet (dé)stabilisant de contraintes limitant les capacités d'échange des agents ?

Éléments de correction

1. Un agent né en t choisit un plan de consommation (c_{1t}, c_{2t+1}) et un portefeuille (m_t, s_t) qui maximise $u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1})$ sous les contraintes

$$c_{1t} + m_t + s_t = w_t \ell_t$$
$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1}) s_t + \frac{m_t}{1 + \pi_{t+1}}$$
$$\mu c_{2t+1} \leqslant \frac{m_t}{1 + \pi_{t+1}}$$
$$\ell_t \leqslant 1$$

2. Supposons que la contrainte de liquidité est saturée.

   2.1. La contrainte de liquidité donne l'encaisse réelle :

$$m_t = \mu (1 + \pi_{t+1}) c_{2t+1}$$

   Avec la contrainte de budget de seconde période, on obtient l'épargne financière :

$$s_t = \frac{1 - \mu}{1 + r_{t+1}} c_{2t+1}$$

   Enfin, avec la contrainte de budget de première période, on obtient l'analogue de la contrainte de budget intertemporelle :

$$c_{1t} + \left(\mu (1 + \pi_{t+1}) + \frac{1 - \mu}{1 + r_{t+1}} \right) c_{2t+1} = w_t$$

   Dans ce qui suit, on notera

$$\frac{1}{1 + \rho_{t+1}} \equiv \mu (1 + \pi_{t+1}) + \frac{1 - \mu}{1 + r_{t+1}}.$$

   Le terme ρ_{t+1} joue donc un rôle analogue au taux d'intérêt réel lorsque la contrainte de liquidité n'est pas active.

   2.2. Pour que l'agent accepte de détenir une épargne sous forme de capital, on doit avoir :

$$1 + r_{t+1} \geqslant \frac{1}{1 + \pi_{t+1}}.$$

   2.3. La maximisation du profit donne

$$r_t = f'(k_t) - \delta \equiv r(k_t) \text{et} \quad w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \equiv w(k_t).$$

   2.4. L'égalité offre-demande sur le marché du capital s'écrit :

$$s_t = (1 + n) k_{t+1} \Leftrightarrow \sigma(w_t, \rho_{t+1}) - m_t = (1 + n) k_{t+1} \tag{10.14}$$

2.5. L'égalité offre-demande sur le marché de la monnaie s'écrit :

$$N_t p_t m_t = \bar{M} = N_{t+1} p_{t+1} m_{t+1}$$

$$\Leftrightarrow m_t = (1+n)(1+\pi_{t+1}) m_{t+1}$$

Si l'agent né en t anticipe qu'il sera contraint lors de sa seconde période de vie, on a :

$$c_{2t+1} = \frac{1}{\mu} \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}} = (1+r_{t+1}) s_t + \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\mu}{\mu} \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}} = (1+r_{t+1}) s_t$$

En utilisant (10.14), l'égalité offre-demande sur le marché de la monnaie se réécrit finalement indépendamment du taux d'inflation :

$$(1-\mu) m_{t+1} = \mu (1+r_{t+1}) k_{t+1} \tag{10.15}$$

2.6. En partant de l'expression de ρ_{t+1} obtenue en 2.1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\rho_{t+1}} &= \frac{(1-\mu) m_t}{(1+r_{t+1}) s_t} + \frac{1-\mu}{1+r_{t+1}} \\ &= \frac{(1-\mu) m_t}{(1+r_{t+1})(1+n) k_{t+1}} + \frac{1-\mu}{1+r_{t+1}} \\ &= (1-\mu) \frac{m_t + (1+n) k_{t+1}}{(1+r_{t+1})(1+n) k_{t+1}} \end{aligned} \tag{10.16}$$

2.7.

$$1+r_{t+1} \geqslant \frac{1}{1+\pi_{t+1}} = \frac{\mu}{1-\mu} \frac{(1+r_{t+1})(1+n) k_{t+1}}{m_t}$$

$$\Leftrightarrow (1-\mu) m_t \geqslant \mu (1+n) k_{t+1} \tag{10.17}$$

2.8. Un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites dans lequel la contrainte de liquidité est saturée lors de chaque période est une suite (m_t, k_t) associée à k_0 telle que (10.14), (10.15) et (10.16) sont satisfaits pour tout t, avec $r_t = r(k_t)$ et $w_t = w(k_t)$, et $(1-\mu) m_t \geqslant \mu (1+n) k_{t+1}$.

2.9. (/1) Si la contrainte de liquidité est saturée lors de chaque période, la relation (10.15) écrite en t donne l'encaisse réelle $(1-\mu) m_t = \mu (1+r_t) k_t$ de sorte que l'on peut obtenir la dynamique du capital indépendamment de l'encaisse réelle. En effet, (10.14) devient :

$$\sigma(w_t, \rho_{t+1}) - \frac{\mu}{1-\mu} (1+r_t) k_t = (1+n) k_{t+1} \tag{10.18}$$

avec, de (10.16),

$$\frac{1}{1+\rho_{t+1}} = \frac{\mu (1+r_t) k_t + (1-\mu)(1+n) k_{t+1}}{(1+r_{t+1})(1+n) k_{t+1}}. \tag{10.19}$$

2.10.

$$\sigma(w,\rho) - \frac{\mu}{1-\mu}(1+r)k = (1+n)k \tag{10.20}$$

$$\frac{1}{1+\rho} = \frac{\mu(1+r)k + (1-\mu)(1+n)k}{(1+n)(1+r)k}. \tag{10.21}$$

$$(1+r)k \geqslant (1+n)k \tag{10.22}$$

On remarque que $k=0$ est solution. Si $k>0$, alors pour $\mu=0$, $k=k^d$: les agents ne détiennent pas de monnaie et le stock de capital par tête est celui du modèle de Diamond. Pour que les agents acceptent de détenir du capital, on doit avoir $r \geqslant n$: l'équilibre de Diamond doit être dynamiquement efficace, contrairement aux résultats du chapitre 6. Pour k proche de k^d et μ proche de 0, on a $\rho \simeq r$. En différentiant (10.20) en ce point, on a :

$$\left[\sigma'_w w' + \sigma'_r r' - (1+n)\right]\frac{dk}{d\mu} = \left[(1+r) - \sigma'_r \rho'_\mu\right]k^d. \tag{10.23}$$

Si $\sigma'_w w' + \sigma'_r r' - (1+n) \neq 0$, et si l'équilibre de Diamond est dynamiquement efficace, il existe un stock de capital stationnaire k solution de (10.20), (10.21), (10.22), pour μ suffisamment petit.

2.11. On différentie (10.18) et (10.19) par rapport à k_t et k_{t+1} dans le voisinage de k^d (pour $\mu=0$) :

$$\sigma'_w w' dk_t + \left[(1+n) - \sigma'_r r'\right]dk_{t+1} = 0$$

Pour $\sigma'_r > 0$ (l'effet de substitution est dominant), et comme $r' < 0$, on a :

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{\sigma'_w w'}{(1+n) - \sigma'_r r'} > 0,$$

puisque $\sigma'_w w' > 0$. La dynamique locale est donc bien définie, aussi bien dans le sens forward que dans le sens backward. L'équilibre de Diamond est localement stable si et seulement si

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} < 1 \Leftrightarrow \sigma'_w w' + \sigma'_r r' - (1+n) < 0.$$

2.12. De (10.21), $\rho'_\mu \sim n - r$. De (10.23), on obtient l'effet sur l'accumulation du capital d'une contrainte de liquidité plus exigeante ($d\mu > 0$). Si l'équilibre de Diamond est localement stable, on a en effet :

$$\frac{dk}{d\mu} \sim \sigma'_r \rho'_\mu - (1+r).$$

Si l'équilibre de Diamond est dynamiquement efficace, $\rho'_\mu < 0$. Il s'ensuit que

$$\frac{dk}{d\mu} < 0.$$

Une contrainte plus exigeante pénalise l'accumulation du capital.

2.13. Pour tout k_t, il existe un unique k_{t+1} solution. En outre, l'équilibre stationnaire $k > 0$ est localement stable. De ce point de vue, la présence d'une contrainte de liquidité a clairement un effet stabilisateur. Mais cette conclusion présuppose que une contrainte de liquidité toujours saturée. La suite du problème va nous montrer que ce n'est pas toujours le cas à l'équilibre.

3. On a :

$$\mu c_{2t+1} < \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}}.$$

Pour que les agents détiennent les deux actifs à l'équilibre, on doit avoir :

$$1 + r_{t+1} = \frac{1}{1+\pi_{t+1}}.$$

La contrainte de budget intertemporelle a alors la forme usuelle :

$$c_{1t} + \frac{1}{1+r_{t+1}} c_{2t+1} = w_t$$

et l'épargne réelle optimale est $m_t + s_t = \sigma(w_t, r_{t+1})$.
Un équilibre intertemporel est tel que

$$m_t = \frac{1+n}{1+r_{t+1}} m_{t+1}$$

$$\sigma(w_t, r_{t+1}) - m_t = (1+n)k_{t+1}$$

$$\begin{aligned} \mu c_{2t+1} &< \frac{m_t}{1+\pi_{t+1}} \Leftrightarrow \mu(1+r_{t+1})\sigma(w_t, r_{t+1}) < (1+r_{t+1})m_t \\ &\Leftrightarrow \mu(1+n)k_{t+1} < (1-\mu)m_t \end{aligned}$$

Si μ est suffisamment petit, l'équilibre stationnaire est celui de la règle d'or. Il est monétaire si $m_{\text{or}} = \sigma(w(k_{\text{or}}), r(k_{\text{or}})) - (1+n)k_{\text{or}} > 0$. À l'équilibre de Diamond, l'encaisse réelle détenue est nulle, ce qui n'est pas compatible avec le fait que la contrainte de liquidité n'est pas saturée. En présence d'une contrainte de liquidité ($\mu > 0$), l'équilibre stationnaire, s'il existe, est nécessairement monétaire et dynamiquement efficace.

4.1. Supposons que les agents anticipent en t qu'ils seront contraints demain. On doit avoir :

$$\sigma(w(k_t), \rho) - m_t = (1+n)k_2$$

$$(1-\mu)m_2 = \mu(1+r_2)k_2$$

$$\frac{1}{1+\rho} = (1-\mu)\frac{m_t + (1+n)k_2}{(1+n)(1+r_2)k_2}$$

4.2. Supposons qu'ils anticipent cette fois ne pas être contraints demain :

$$m_t = \frac{1+n}{1+r_1} m_1$$

$$\sigma(w_t, r_1) - m_t = (1+n)k_1$$

4.3.

$$\sigma(w(k_1), \rho) - m_1 = (1+n)k_2$$

$$\big(1-\mu\big)\, m_2 = \mu(1+r_2)k_2$$

$$\frac{1}{1+\rho} = \big(1-\mu\big)\frac{m_1 + (1+n)k_2}{(1+n)(1+r_2)k_2}$$

$$m_2 = \frac{1+n}{1+r_1} m_1$$

$$\sigma(w_2, r_1) - m_2 = (1+n)k_1$$

4.4. La fonction d'épargne prend une forme simple : $\sigma(w,\rho) = w/(1-\beta)$. L'effet de revenu compense exactement l'effet de substitution de sorte que l'épargne devient indépendante du taux d'intérêt. On élimine m_1 et m_2 :

$$m_2 = \frac{\mu}{1-\mu}(1+r_2)k_2$$

$$m_1 = \frac{1+r_1}{1+n} m_2 = \frac{1+r_1}{1+n}\frac{\mu}{1-\mu}(1+r_2)k_2$$

On en déduit :

$$\frac{w(k_1)}{1-\beta} - \frac{1+r_1}{1+n}\frac{\mu}{1-\mu}(1+r_2)k_2 = (1+n)k_2 \tag{10.24}$$

$$\frac{w(k_2)}{1-\beta} - \frac{\mu}{1-\mu}(1+r_2)k_2 = (1+n)k_1 \tag{10.25}$$

4.5. Au point $\mu = 0$, $k_1 = k_2 = k^d$ est solution. Pour μ suffisamment petit, et (k_1, k_2) proches de k^d, le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe une solution au système formé par (10.24) et (10.25) si :

$$\det\begin{pmatrix} \sigma'_w w' & -(1+n) \\ -(1+n) & \sigma'_w w' \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \big(\sigma'_w w' - (1+n)\big)\big(\sigma'_w w' + (1+n)\big) \neq 0$$

On sait que $\sigma'_w w' > 0$. Si l'équilibre de Diamond est localement stable, $\sigma'_w w' - (1+n) < 0$ (puisque, dans le cas Cobb-Douglas, $\sigma'_r = 0$). Cette condition est donc satisfaite : (k_1, k_2) sont des fonctions continues de

μ. Une contrainte de liquidité peut donc s'accompagner de fluctuations endogènes perpétuelles dans lequelles l'économie alterne entre les deux régimes monétaires : la contrainte de liquidité est saturée pendant un certain temps, le rendement du capital s'élève au-dessus du taux de croissance démographique, de sorte que les ménages épargnent plutôt sous forme de capital, ce qui réduit le rendement futur du capital et desserre dans le futur la contrainte de liquidité, les ménages souhaitant détenir de la monnaie.

7. REPÈRES BIBLIOGRAPHIQUES

L'article de référence sur les fluctuations endogènes est celui de Grandmont (1985). Grandmont (1986) étudie les politiques de stabilisation des fluctuations. Voir aussi Grandmont (1998) pour une synthèse sur les dynamiques avec apprentissage, et Guesnerie (1992) pour l'apprentissage divinatoire. Vous pouvez lire l'article d'Azariadis (1981) qui introduit les équilibres à taches solaires (stationnaires), et dont on s'est largement inspiré dans ce chapitre.

Bibliographie

ABEL A., 1985, Dynamic behavior of capital accumulation in a cash-in-advance model, Journal of Monetary Economics 16, 55-71.

ABEL A., G. MANKIW, L. SUMMERS et R. ZECKAUSER, 1989, Assessing Dynamic efficiency: Theory and evidence, *Review of Economic Studies* 56, 1-20.

ALESINA A., 1987, Macroeconomic policy in a two-party system as a repeated game, *Quarterly Journal of Economics* 102, 651-78.

ARDANT G., 1971, *Histoire de l'impôt*, Tome 1, Fayard.

ATTANASIO O.P. and G. WEBER, 1993, Consumption Growth, the Interest Rate and Aggregation, *Review of Economic Studies*, vol. 60, 1983, 631-649

AZARIADIS C., 1980, A reexamination of the natural rate theory, *American Economic Review* 71, 944-60.

AZARIADIS C., 1981, Self-fulfilling prophecies, *Journal of Economic Theory* 25, 380-96.

AZARIADIS C., 1993, *Intertemporal Macroeconomics*, Basil Blackwell.

AZARIADIS C. et R. GUESNERIE, 1986, Sunspots and cycles, *Review of Economic Studies* 53, 725-737.

BACKUS D. et J. DRIFILL, 1985, Inflation and reputation, *American Economic Review* 75, 530-8.

BAIROCH P., 1985, *De Jericho à Mexico*, Gallimard.

BAIROCH P., 1999, *Mythes et paradoxes de l'histoire économique*, La découverte.

BARRO R. et X. SALA-I-MARTIN, 2003, *Economic Growth*, 2^{e} édition, MIT Press.

BELAN P. et P. PESTIEAU, 1998, Privatizing social security: a critical assessment, *The Geneva Papers on Risk and Insurance* 24, 114-130.

BERNHEIM B.D. 1987, Ricardian Equivalence: An Evaluation of Theory and Evidence, dans Fisher, S. (ed.) *NBER Macroeconomics Annual 1987*, MIT Press, Cambridge, 263-304.

BLANCHARD O. et D. COHEN, 2002, *Macroéconomie*, Pearson Éducation.

BLANCHARD O. et S. FISCHER, 1989, *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.

BLANCHARD O., C. RHEE et L. SUMMERS, 1993, The stock market, profit and investment, *Quarterly Journal of Economics* 108, 115-136.

BLAUG M., 1985, *La pensée économique : origine et développement*, Economica.

BLOISE G., S. BOSI et F. MAGRIS, 2000, Indeterminacy and cycles in a cash-in-advance economy with production, *Rivista Internazionale di Scienze Sociali* 108, 263-76.

BROWNING M. and A. LUSARDI, 1996, Household Saving: Micro Theories and Micro Facts, *Journal of Economic Literature*, vol. 34, 1797-1855.

CAMPBELL J. et G. MANKIW, 1989, Consumption, Income, and Interest Rates: reinterpreting the Time Series Evidence, dans O. Blanchard et S. Fischer, éditeurs, N.B.E.R. *Macroeconomics Annual*, Princeton University Press.

CETTE G., Y. KOCOGLU et J. MAIRESSE, 2002, Croissance économique et diffusion des TIC : Le cas de la France sur longue période (1980-2000), *Revue Française d'Économie* 16, 155-192.

CETTE G., Y. KOCOGLU et J. MAIRESSE, 2004, L'effet de la diffusion des technologies de l'information et de la communication sur la productivité par employé en France, *Bulletin de la Banque de France* 121, accessible en ligne : http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu121_1.pdf

CHIAPPORI P.A. et R. GUESNERIE, 1990, Anticipations, indétermination, et non-neutralité de la monnaie, *Annales d'Économie et Statistiques* 19, 1-25.

DEATON A., 1992, Understanding Consumption, Clarendon Lectures in Economics, *Oxford University Press*.

DELONG B., 1988, Productivity growth, convergence and welfare: Comment, *American Economic Review* 78, 1138-1154.

DEMANGE G. et G. LAROQUE, 2000, Retraites par répartition ou par capitalisation : une analyse de long terme, *Revue Économique* 51, 813-29.

DIAMOND P., 1965, National debt in a neoclassical growth model, *American Economic Review* 55, 1126-50.

ELSTER J., 1986, *Le laboureur et ses enfants*, Éditions de Minuit.

FELDSTEIN M., 1974, Incidence of a capital income tax in a growing economy with variable saving rates, *Review of Economic Studies* 41, 505-13.

GALE D., 1973, Pure exchange equilibrium of dynamic economic models, *Journal of Economic Theory* 6, 12-36.

GRANDMONT J.M., 1985, On endogenous competitive business cycles, *Econometrica* 53, 995-1045.

GRANDMONT J.M., 1986, Stabilizing competitive business cycles, *Journal of Economic Theory* 40, 57-76.

GRANDMONT J.M., 1998, Expectations formation and stability of large socioeconomic systems, *Econometrica* 66, 741-781.

GUESNERIE R., An Exploration of the Educative Justifications of the Rational Expectations Hypothesis, *American Economic Review* 82, 1254-1278.

GUPTA K., 1976, Incidence of a capital income tax in a growing two-class economy, *Review of Economic Studies* 43, 561-62.

HAIRAULT J.O., 1992, Présentation et évaluation du courant des cycles réels, *Économie et Prévision* 106, 1-22.

HALL R., 1989, Consumption, dans R. Barro (ed.), *Modern Business Cycle Theory*, Harvard University Press.

KALDOR N., 1955, Alternative theories of distribution, *Review of Economic Studies* 23, 83-100.

KAMIEN M. et N. SCHWARTZ, 1991, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier North Holland.

KIYOTAKI N. et R. WRIGHT, 1989, On money as a medium of exchange, *Journal of Political Economy* 97, 927-54.

KORAY F. et W.D. MCMILLIN, 1987, The Ricardian equivalence hypothesis: Some Canadian evidence, *Economics Letters* 25, 15-19.

KYDLAND F. et E. PRESCOTT, 1985, Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans, *Journal of Political Economy* 85, 473-91.

LUCAS R., 1972, Expectations and the neutrality of money, *Journal of Economic Theory* 4, 103-24.

MADDISON A., 2001, *Growth and interaction in the world economy: The roots of modernity*, AEI Press, Washington. Texte en ligne : http://www.ggdc.net/maddison/

MADDISON A., 2001, *The World Economy: A Millennial Perspective*, OCDE. Texte en ligne : http://www.ggdc.net/maddison/

MADDISON A., 2004, *Macromeasurement before and after Colin Clark*, Colin Clark Lecture. Texte en ligne : http://www.ggdc.net/maddison/

MALINVAUD E., 1998, *Les cotisations sociales à la charge des employeurs : analyse économique*, Rapport du Conseil d'Analyse Économique 9.

MICHEL P., 1989, *Cours de mathématiques pour économistes*, Economica.

MUET P.A., 1992, *Théories et modèles de la macroéconomie*, Tome 1, Economica.

MUTH J., 1961, Rational expectations and the theory of price movements, *Econometrica* 29, 315-35.

NORDHAUS W., 1975, The political business cycle, *Review of Economic Studies* 42, 169-90.

PASINETTI L., 1962, Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth, *Review of Economic Studies* 29, 267-79.

PHELPS Edmund S. 1961, The golden rule of capital accumulation: A Fable for growthmen, *American Economic Review* 51, 638-643.

ROBERT-BOBÉE I., 2006, *Projections de population 2005-2050 pour la France métropolitaine*, INSEE Résultats 57.

ROGOFF K., 1985, The optimal commitment to an intermediate monetary target, *Quarterly Journal of Economics* 100, 1169-89.

ROMER D., 2001, *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill.

SCARPETTA S., A. BASSANINI, D. PILAT et P. SCHREYER, 2000, Economic growth in the OECD area: recent trends at the aggregate and sectoral levels, ECO working paper 248, OCDE, texte accessible en ligne : http://www.oecd.org/dataoecd/15/6/1885257.pdf.

SHELL K., 1971, Notes on the economics of infinity, *Journal of Political Economy* 79, 1002-11.

SOLOW R., 1956, A contribution to the theory of Economic growth, *Quarterly Journal of Economics* 70, 65-94.

STOCK J. et M. WATSON, 1998, Business cycle fluctuations in U.S. macroeconomic time series, NBER Working Paper 6528.

STOCKEY N., R. LUCAS et E. PRESCOTT, 1989, *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.

STOCKMAN A., 1981, Anticipated inflation and the capital stock in a cash-in-advance economy, *Journal of Monetary Economics* 8, 387-93.

SUSSMAN N., 1993, Debasements, royal revenues, and inflation in France during the Hundred Years' War, 1415-1422, *Journal of Economic History* 53, 44-70.

SUSSMAN N. et J. ZEIRA, 2003, Commodity money inflation: theory and evidence from France in 1350-1436, *Journal of Monetary Economics* 50, 1769-93.

WALSH C., 2003, *Monetary Theory and Policy*, MIT Press.